PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. 1. Februar 1914. 15. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 4 am 31. Januar 1914.

INHALT:

Originalmitteilungen:

K. Strecker, Formel- und Einheitszeichen. S. 113.

G. Mie, Bemerkungen zu der Einsteinschen Gravitationstheorie. I. S. 115.

A. Lo Surdo, Über das elektrische Analogon des Zeeman-Phänomens. S. 122.

A. Garbasso, Theoretisches über das elektrische Analogon des Zeemanphänomens. S. 123.

E. Gehrcke, Über ein Modell zur Erklärung der Lichtemission. S. 123.

H. Thirring, Raumgitterschwingungen und spezifische Wärmen mehratomiger fester Körper. I. S. 127.

G. Krutkow, Aus der Annahme unabhängiger Lichtquanten folgt die Wiensche Strahlungsformel. S. 133.

J. Kern, Zur Frage der Intensitätsverteilung in den Röntgenstrahlen-Interferenzphotographien. S. 136.

J. Laub, Über einige Erscheinungen beim Durchgang von harten Röntgenstrahlen durch Körper. S. 140.

D. Vorländer, Die optische Anisotropie der flüssigen Kristalle. S. 141.

H. Rukop u. J. Zenneck, Die Transformation eines Hochfrequenzstroms auf die dreifache Frequenz. S. 145.

E. Bompiani u. G. Rümelin, Eine kalorimetrische Meßanordnung. S. 152.

A. M. Tyndall u. G. W. White, Die Eigenschaften von Selenblöcken. S. 154.

F. Herath, Die Messung der Niederschlagselektrizität durch das Galvanometer. S. 155.

G. Jaumann, Feststellung einer Priorität in der Gravitationstheorie. S. 159.

Vorträge und Diskussionen von der 85. Naturforscherversammlung zu Wien:

C. G. Barkla, Charakteristische Röntgenstrahlungen. S. 160.

Zusammenfassender Bericht:

H. Konen, Fünfte Konferenz der Internationalen Vereinigung für Sonnenforschung (International Union for Cooperation in Solar Research) in Bonn, 30. Juli bis 5. August 1913. S. 163.

Besprechungen:

P. Langevin u. M. de Broglie, La théorie du rayonnement et les quanta. S. 166.

J. D. van der Waals, Lehrbuch der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf das Gleichgewicht von Systemen mit gasförmig-flüssigen Phasen. II. S. 167.

H. W. B. Roozeboom, Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. III$_2$. S. 168.

Personalien. S. 168.

Angebote. S. 168.

Gesuche. S. 168.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Formel- und Einheitszeichen [1]).

Von K. Strecker.

In den letzten Jahren sind auf dem Gebiete der Formel- und Einheitszeichen von den dazu berufenen Körperschaften einige wichtige Beschlüsse gefaßt, andere vorbereitet worden [2]). Es scheint zweckmäßig, jetzt, am Jahresschluß, zusammenzustellen, was endgültig beschlossen und was mit guter Aussicht auf Annahme vorgeschlagen worden ist.

I. Formelzeichen.

Der Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen (AEF) hat schon vor einiger Zeit die nachfolgende Liste veröffentlicht (diese Zeitschr. **14**, 169, 1913); sie enthält 32 endgültig angenommene Zeichen [3]).

Formelzeichen des AEF.

*Länge	l
*Masse	m
*Zeit	t
Halbmesser	r
Durchmesser	d
Wellenlänge	λ
Körperinhalt, Volumen	V
*Winkel, Bogen	$\alpha, \beta, \ldots$
*Voreilwinkel, Phasenverschiebung	φ
Geschwindigkeit	v
*Fallbeschleunigung	g
Winkelgeschwindigkeit	ω
*Umlaufzahl, Drehzahl (Zahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit)	n
*Wirkungsgrad	η
Druck (Druckkraft durch Fläche)	p
Elastizitätsmodul	E
*Temperatur, absolute	T
* „ vom Eispunkt aus	t
Wärmemenge	Q
Spezifische Wärme	c
Spezifische Wärme bei konstantem Druck	c_p
Spezifische Wärme bei konstantem Volumen	c_v
Wärmeausdehnungskoeffizient	α
*Magnetisierungsstärke	$\mathfrak{J}$
*Stärke des magnetischen Feldes	$\mathfrak{H}$
*Magnetische Dichte (Induktion)	$\mathfrak{B}$
*Magnetische Durchlässigkeit (Permeabilität)	μ
*Magnetische Aufnahmefähigkeit (Suszeptibilität)	$\varkappa$
*Elektromotorische Kraft	E
*Elektrizitätsmenge	Q
*Induktivität (Selbstinduktionskoeffizient)	L
*Elektrische Kapazität	C

1) Anmerkung der Redaktion: Wir glauben im Interesse aller Leser und Mitarbeiter zu handeln, wenn wir ihnen in nachstehendem Aufsatz, dessen Abdruck aus der Elektrotechnischen Zeitschrift uns der Verfasser und die Schriftleitung auf unsere Bitte hin in dankenswerter Weise gestattet haben, die bisherigen Ergebnisse der verdienstvollen Vereinheitlichungsbestrebungen des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen (AEF) zur Kenntnis bringen. An unsere Mitarbeiter richten wir die Bitte, in Zukunft bei ihren Arbeiten für die Physikalische Zeitschrift diese Zeichen zu benutzen, und hoffen, daß diese Bitte nicht vergeblich sein wird, wenn auch dazu der Einzelne durch Verzicht auf seine gewohnte Schreibweise manchmal ein Opfer bringen muß. Wir glauben aber, daß sich dieses Opfer reichlich dadurch lohnt, daß durch die Verwendung einheitlicher Zeichen die Lektüre der Abhandlungen außerordentlich erleichtert, und damit die Verbreitung der darin mitgeteilten Gedanken und Ergebnisse, die ja im eigensten Interesse der Verfasser liegt, erheblich gefördert wird.

2) Vgl. Neesen, diese Zeitschr. **14**, 167, 1913.

3) Die Formelzeichenliste des AEF ist in kleiner Aus-

Diejenigen Zeichen, die am linken Rande der Zusammenstellung einen Stern tragen, sind auch von der Internationalen Elektrotechnischen Kommission (IEC) angenommen worden; mit den anderen Zeichen dieser Liste hat sich die IEC nicht beschäftigt. Die drei Zeichen in Fraktur, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, werden wohl später durch die gleichen Buchstaben in lateinischer Kursivschrift ersetzt werden, J, H, B; diese Zeichen hat die IEC bereits angenommen.

Nach einem vom AEF angenommenen Satz (vgl. diese Zeitschr. **14**, 167, 1913) ist die Celsiustemperatur, wenn sie in einer Formel mit der Zeit zusammentrifft, durch ϑ zu bezeichnen; die IEC hat diesen Satz dahin erweitert, daß die absolute Temperatur durch Θ, die Celsiustemperatur durch ϑ bezeichnet wird.

Zu dieser Liste treten zunächst die durch internationalen Beschluß angenommenen

Elektrischer Strom	I
Elektrischer Widerstand	R.

Der AEF hat ferner eine Liste B aufgestellt (seine Liste A war im wesentlichen die obige angenommene Liste), welche ebenfalls a. a. O. in dieser Zeitschrift abgedruckt ist. Sie enthält mehrere Größen aus der Ingenieurmechanik, die hier von geringerer Wichtigkeit sind und daher zunächst außer Betracht bleiben. Diese Liste B ist gegenwärtig noch Vorschlag.

Aus der Liste B des AEF.

Fläche	F
Kraft	P
Trägheitsmoment	J
Zentrifugalmoment	C
Reibungsziffer	μ
Schwingungszahl in der Zeiteinheit	n
Mechanisches Wärmeäquivalent	J
Innere Energie	U
Entropie	S
Lichtstärke	J

Dazu kommen zwei Größen, die in der Liste A enthalten waren, aber noch nicht angenommen worden sind, die Arbeit und die Gaskonstante; ferner enthält die Liste B noch eine wichtige, in dem vorstehenden Verzeichnis nicht aufgeführte Größe, die Leistung.

Für die Arbeit hat man sich jetzt auf ein Zeichen geeinigt; der AEF hatte dafür A vorgeschlagen; und die IEC hat dieses Zeichen angenommen; es wird in der weiter unten mitgeteilten Liste der IEC aufgeführt.

Für die Leistung wird bekanntlich in Deutschland L gebraucht; in den anderssprachigen Ländern verwendet man P (von puissance, power), was aber bei uns Kraft bedeutet. Da L nun gleichzeitig die Induktivität ist, beide Größen aber häufig und nebeneinander gebraucht werden, wird L für die Leistung nicht beibehalten werden können. Es wird nun, entsprechend dem Gebrauch bei den Maschineningenieuren, dafür N vorgeschlagen werden.

Die Gaskonstante ist R. Diese Größe wird aber auf verschiedenen Gebieten in verschiedener Weise benutzt; die Chemiker und Physiker definieren sie so, daß sie für alle Gase denselben Zahlenwert hat, die Ingenieure in anderer Weise so, daß ihr Wert von einem Gas zum andern wechselt. Über diesen Punkt muß noch eine Verständigung erzielt werden.

Außer den schon besprochenen Größen hat die IEC noch für mehrere andere Zeichen festgesetzt; der AEF wird diese demnächst in einer Liste C veröffentlichen. Hier möge die Liste der IEC in französischer Fassung mit deutscher Übersetzung mitgeteilt werden.

Aus der Formelzeichenliste der IEC.

Énergie	W	Energie
Travail	A	Arbeit (elektr. und mechan.)
Période	T	Dauer der Periode
Fréquence	f	Frequenz (bei Wechselstrom)
Pulsation	ω	Kreisfrequenz
Résistivité	ϱ	Spezif. Widerstand
Conductance	G	Leitwert
Induction électrostatique	D	Elektrostatische Induktion
Constante diélectrique	ε	Dielektrizitätskonstante
Inductance mutuelle	M	Gegeninduktivität
Flux magnétique	Φ	Magnetfluß

Es ist die Möglichkeit offen gehalten worden, für Frequenz das Zeichen ν und für Leitwert statt G ein anderes Zeichen zu wählen[1]).

Außerdem hat die IEC noch für die Größen Reluktanz (magnet. Widerstand), Reaktanz und Impedanz Zeichen aufgestellt; diesen Vorschlägen hat sich der AEF nicht angeschlossen.

II. Einheitszeichen.

Der AEF hat einen Entwurf über die Einheitszeichen veröffentlicht, dessen neueste Fassung in der „ETZ", 1913, S. 308, abgedruckt ist. Diese Fassung unterliegt noch der Beratung. Aus dem Entwurf des AEF sind eine große Zahl Einheitszeichen in die Liste der IEC übergegangen, die im September dieses Jahres endgültig angenommen worden ist. Der

gabe (20×29 cm) und in Plakatform (75×60 cm) erschienen. Sie kann von der Geschäftsstelle des Elektrotechnischen Vereins, Berlin SW 11, Königgrätzer Str. 106, bezogen werden. Preise: kleine Ausgabe das Stück 2 Pf., mindestens 20 Pf.; Plakat das Stück 25 Pf., Versandkosten für 1 Stück 35 Pf., für 4 Stück 45 Pf.

1) Der AEF spricht sich für Beibehaltung von f und G aus.

AEF wird voraussichtlich im gleichen Sinne beschließen. Diese Zeichen[1]) sind die folgenden:

Ampere	A
Volt	V
Ohm	Ω[2])
Coulomb	C
Joule	J
Watt	W
Farad	F
Henry	H
Voltcoulomb	VC
Wattstunde	Wh
Voltampere	VA
Amperestunde	Ah

Zur Bildung der Zeichen für Teile und Vielfache dieser Einheiten werden folgende Vorsätze benutzt:

m für Milli-
k „ Kilo-
μ „ Mikro- oder Mikr-
M „ Mega- oder Meg-

also

Milliampere	mA
Kilowatt	kW
Mikrofarad	μF
Megohm	$M\Omega$

Der AEF hat außerdem als Einheit des Leitwerts das Siemens und als Zeichen S festgesetzt; die IEC wird diese Einheit dem in San Francisco 1915 zusammentretenden internationalen Elektrotechniker-Kongreß zur Annahme empfehlen.

Das Kilowatt als Einheit der Leistung, sowohl der mechanischen als der elektrischen, ist vom AEF bereits früher angenommen worden („ETZ" 1912, S. 963); auf der letzten Jahresversammlung des Verbandes Deutscher Elektrotechniker ist beschlossen worden, das Kilowatt in diesem Sinne vom 1. Januar 1914 an allgemein zu gebrauchen („ETZ" 1912, S. 909).

Als Zeichen für die Einheiten der Länge, der Fläche, des Raumes und der Masse gelten nach den amtlichen Festsetzungen, dem Entwurfe des AEF und dem Beschluß der IEC:

m; km; dm; cm; mm; μ = 0,001 mm[3]).
a; ha; m^2; km^2; dcm^2; cm^2; mm^2.
l; hl; dl; cl; ml; m^3; km^3; dcm^3; cm^3; mm^3.
g; t; kg; dg; cg; mg.

Die Einheitszeichen sollen nur nach reinen Zahlenausdrücken, nicht in Formeln verwendet werden; bei Formeln gebraucht man den Einheitsnamen entweder unverkürzt oder in einer aus mehreren Buchstaben gebildeten Abkürzung.

1) Die Einheitszeichen sind gerade, die Formelzeichen Kursiv-Buchstaben.

2) Als Zeichen für Ohm wird von der IEC O und Ω wahlweise empfohlen; Ω soll nicht mehr als Zeichen für Megohm benutzt werden. Das vom AEF früher empfohlene Θ wird zurückgezogen.

3) Das in der Physik häufig gebrauchte $\mu\mu$ ist unrichtig gebildet; es sollte $m\mu$ heißen.

(Eingegangen 12. Januar 1914.)

Bemerkungen zu der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von Gustav Mie.

1. Einleitung.
2. Allgemeine Theorie der Gravitation mit einem Tensorpotential.
3. Unmöglichkeit der Identität von schwerer und träger Masse.
4. Spezielle Annahmen der Einsteinschen Theorie.
5. Die Grundgleichungen der Einsteinschen Theorie.
6. Der Energietensor.
7. Satz von der Relativität des Gravitationspotentials.
8. Gleichheit der trägen und der schweren Masse abgeschlossener Systeme in den Theorien von Einstein und von Mie.
9. Innerer Widerspruch in den Einsteinschen Nebenannahmen.
10. Anhang: Die beiden Gravitationstheorien von Nordström.
11. Schluß: Zusammenfassung.

1. Einleitung. In seiner interessanten Arbeit „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie usw."[1]) sagt Herr Einstein, er habe mit der Einführung einer veränderlichen Lichtgeschwindigkeit „den Rahmen der gegenwärtig als Relativitätstheorie bezeichneten Theorie durchbrochen", und stellt auch fernerhin seine Theorie mehrfach in Gegensatz zu der „alten Relativitätstheorie". Obwohl jemandem, der sich gründlich in die Abhandlung vertieft, klar werden mag, inwiefern Herr Einstein von einer neuen Relativität sprechen kann, so wird doch vermutlich ein oberflächlicherer Leser durch die zitierten Aussprüche zu der falschen Ansicht geführt werden, daß es sich hier wirklich um einen Bruch mit der bisherigen Relativitätstheorie handle. Es ist deswegen jedenfalls nicht ohne Interesse, wenn ich im folgenden mit Hilfe der Methoden, die ich kürzlich in einer größeren Arbeit über die Theorie der Materie[2]) im strengsten Anschluß an die Minkowskische Auffassung des Relativitätsprinzips entwickelt habe, eine allgemeine Theorie der Gravitation mit Tensorpotential aufstelle, die die Einsteinsche Theorie als einen Spezialfall in sich schließt. Die von mir angewandten Methoden haben den Vorteil, daß sie im Gegensatz zu den recht unübersichtlichen Formeln Einsteins klar durchsichtige Ausdrücke liefern. Auf diese Weise wird es dann möglich, die Einsteinsche Theorie in ihrem Wesen besser zu erfassen, insbesondere über die sog. Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips Klarheit zu bekommen, und außerdem sie mit der kürzlich von mir selber vorgeschlagenen Gravitationstheorie[3]) und mit der davon

1) A. Einstein u. M. Großmann, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. Als Sonderdruck erschienen bei B. G. Teubner. 1913.

2) G. Mie, Ann. d. Phys., Abhandlung I: **37**, 511, 1912; Abhandlung II; **39**, 1, 1912; Abhandlung III: **40**, 1, 1913.

3) G. Mie, l. c., III, S. 25 ff.

nur ziemlich wenig abweichenden Nordströmschen Theorie[1]) zu vergleichen.

2. Allgemeine Theorie der Gravitation mit einem Tensorpotential. Der wesentliche Unterschied der Einsteinschen Gravitationstheorie gegen die meinige ist, daß sie das Gravitationsfeld nicht mit Hilfe eines Vierervektors beschreibt, sondern mit Hilfe einer Raum-Zeit-Größe dritten Ranges, die sich zum Tensor, also der Größe zweiten Ranges, gerade so verhält, wie der Vierervektor, die Größe ersten Ranges, zum Skalar, der Größe nullten Ranges. Da der Tensor 10 Komponenten hat, so hat bei Einstein das Gravitationsfeld 40 Komponenten, die sich alle leicht überblicken lassen, wenn man immer je vier einer Tensorkomponente zuordnet, wie die vier Komponenten eines Vierervektors zu einem Skalar. Es sei mir erlaubt, der Anschaulichkeit wegen eine solche Größe einen Tensorenvektor zu nennen. Ich werde die räumlichen Komponenten dieses Tensorenvektors alle mit $\mathfrak{g}$, die zeitlichen Komponenten mit $i \cdot u$ bezeichnen (vgl. Theorie der Materie III, S. 28). Die vier Komponenten, die zu der mit (μ, ν) numerierten Tensorkomponente gehören, lauten also: $\mathfrak{g}_{\mu\nu x}$, $\mathfrak{g}_{\mu\nu y}$, $\mathfrak{g}_{\mu\nu z}$, $i \cdot u_{\mu\nu}$. Die Indizes μ, ν haben die Werte von 1 bis 4 zu durchlaufen, und dabei ist $\mathfrak{g}_{\mu\nu} = \mathfrak{g}_{\nu\mu}$, $u_{\mu\nu} = u_{\nu\mu}$. Außer dem Tensorenvektor $(\mathfrak{g}_{\mu\nu}, i u_{\mu\nu})$ führe ich gleich noch einen zweiten ein, den ich durch die Buchstaben $\mathfrak{k}$ und w bezeichnen will (l. c. III, S. 28), also: $(\mathfrak{k}_{\mu\nu}, i w_{\mu\nu})$. Durch diesen zweiten Tensorenvektor soll das Gravitationsfeld ebenso gut zu beschreiben sein, wie durch den ersten; sie sollen beide in einer ähnlichen Beziehung zueinander stehen, wie elektrische Feldstärke und elektrische Verschiebung oder wie elastische Spannung und elastische Deformation. Im idealen Vakuum, d. h. unendlich weit entfernt von aller Materie, soll $(\mathfrak{k}_{\mu\nu}, i w_{\mu\nu}) = (\mathfrak{g}_{\mu\nu}, i \cdot u_{\mu\nu})$ sein. Außer dem Tensorenvektor, als welchen wir beliebig einen der eben genannten nehmen dürfen, gehört zur vollständigen Beschreibung des Ätherzustandes im Gravitationsfeld noch eine vierdimensionale Tensorgröße, die ich mit $\omega_{\mu\nu}$ bezeichnen will, und die man das Gravitationspotential nennen darf. Auch die Dichtigkeit der schweren Masse muß in dieser Theorie eine Tensorengröße sein, ich will ihre Komponenten $h_{\mu\nu}$ nennen und zunächst noch gar keine näheren Annahmen darüber machen, wie sie sich aus den Zustandsgrößen, durch die der materielle Körper charakterisiert ist, berechnen. Ich stelle nun die folgenden 50 Gleichungen für die 50 Größen $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, $i \cdot u_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$ auf, durch die das Gravitationsfeld vollständig beschrieben wird (vgl. l. c. III, S. 28):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mu\nu x} &= \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial x} \\ \mathfrak{g}_{\mu\nu y} &= \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial y} \\ \mathfrak{g}_{\mu\nu z} &= \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial z} \\ u_{\mu\nu} &= -\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial t} \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{k}_{\mu\nu x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{k}_{\mu\nu y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{k}_{\mu\nu z}}{\partial z} + \frac{\partial w_{\mu\nu}}{\partial t} = -\varkappa \cdot h_{\mu\nu}. \qquad (2)$$

Die Größe $\varkappa$ ist eine universelle Konstante, die von Einstein ebenso bezeichnet wird, während ich in der „Theorie der Materie" dafür den Buchstaben γ gesetzt habe. Da die Gleichungen (1) und (2) die Lorentzsche Transformation zulassen, ist das Relativitätsprinzip in dieser Theorie erfüllt. Die Gleichungen (1) sind übrigens äquivalent mit den folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{g}_{\mu\nu x}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{g}_{\mu\nu y}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{g}_{\mu\nu z}}{\partial t} + \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial t} + u_{\mu\nu} = 0. \qquad (4)$$

Multipliziert man die Gleichungen (2) mit den $u_{\mu\nu}$, die Gleichungen (3) mit den $\mathfrak{k}_{\mu\nu x}$, $\mathfrak{k}_{\mu\nu y}$, $\mathfrak{k}_{\mu\nu z}$ und addiert alles, so bekommt man mit Benutzung von (4):

$$\operatorname{div} \sum u_{\mu\nu} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu} + \sum \mathfrak{k}_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial \mathfrak{g}_{\mu\nu}}{\partial t} + \sum u_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial w_{\mu\nu}}{\partial t} - \varkappa \cdot \sum h_{\mu\nu} \cdot \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial t} = 0.$$

Die Summenzeichen sind hier so zu verstehen, daß sowohl über μ, wie auch über ν von 1 bis 4 zu summieren ist, gerade als ob die mit μ, ν und die mit ν, μ numerierten Größen verschiedene Größen wären. Die Summe $\Sigma u_{\mu\nu} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu}$ liefert einen gewöhnlichen dreidimensionalen Vektor, den man als den Energiestrom betrachten darf (vgl. l. c. III, S. 29). Es läßt sich dann leicht zeigen, daß das Energieprinzip erfüllt ist, wenn es einen vierdimensionalen Skalar H gibt, der eine Funktion sämtlicher den Ätherzustand bestimmenden Größen ist, darunter auch der Größen $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, $u_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$, aus dem sich der andere Tensorenvektor des Gravitationsfeldes $(\mathfrak{k}_{\mu\nu}, i \cdot w_{\mu\nu})$ folgendermaßen ableiten läßt:

1) G. Nordström, diese Zeitschr. 13, 1126, 1912; Ann. d. Phys. 40, 856, 1913. Inzwischen hat Herr Nordström eine zweite, ganz andere Theorie aufgestellt, die ich am Schluß dieser Arbeit kurz besprechen werde.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{k}_{\mu\nu x} &= \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}_{\mu\nu x}}, \quad \mathfrak{k}_{\mu\nu y} = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}_{\mu\nu y}}, \\ \mathfrak{k}_{\mu\nu z} &= \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}_{\mu\nu z}}, \quad w_{\mu\nu} = -\frac{\partial H}{\partial u_{\mu\nu}} \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

und der außerdem noch die folgenden Differentialgleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{\mu\nu}} = -\varkappa \cdot h_{\mu\nu}. \qquad (6)$$

Der Beweis für diese Behauptung ist außerordentlich einfach, er geht genau so, wie der für den entsprechenden Satz in der Gravitationstheorie mit skalarem Potential (l. c. III, S. 29, 30) und ich brauche ihn deswegen hier nicht noch einmal herzuschreiben.

Bei allen Differentiationen in (5) und (6) hat man übrigens die Größen mit dem Index (μ, ν) von denen mit dem Index (ν, μ) formell als verschieden zu betrachten.

Die Größe H ist nichts anderes als die Ruhdichte der Energie (oder was dasselbe ist, die Ruhdichte der trägen Masse), sie spielt in der allgemeinen Theorie der Materie ganz die Rolle der Hamiltonschen Funktion pro Volumeneinheit, ich nenne sie deswegen meistens kurzweg die Hamiltonsche Funktion.

Wir wollen nun die Kraft berechnen, die ein Massenteilchen in einem äußeren Schwerefeld $(\mathfrak{g}_{\mu\nu}, i \cdot u_{\mu\nu})$ erfährt. Die Rechnung läßt sich für das Gravitationsfeld mit Tensorenpotential in genau derselben Weise durchführen wie für das Gravitationsfeld mit skalarem Potential (l. c. III, S. 35—40). Voraussetzung der Rechnung ist, daß in dem Raum, welcher das von dem Massenteilchen erfüllte Volumen umgibt, das Verhältnis des Vektors $(\mathfrak{k}_{\mu\nu}, i \cdot w_{\mu\nu})$ zu dem Vektor $(\mathfrak{g}_{\mu\nu}, i \cdot u_{\mu\nu})$ als konstant betrachtet werden darf. Für die schwere Masse des Teilchens ergibt die Rechnung eine Größe mit den folgenden 10 Komponenten:

$$m^{\mathfrak{g}}_{\mu\nu} = \int h_{\mu\nu} \cdot dV. \qquad (7)$$

Das Integral ist über das ganze von dem Massenteilchen erfüllte Volumen V zu erstrecken. Die Kraft, die das Teilchen erfährt, berechnet sich durch die Doppelsumme:

$$\mathfrak{P} = \varkappa \cdot \sum_1^4{}_\nu \sum_1^4{}_\mu \mathfrak{g}_{\mu\nu} \cdot m^{\mathfrak{g}}_{\mu\nu}. \qquad (8)$$

3. Unmöglichkeit der Identität von schwerer und träger Masse. Da die Dichte der trägen Masse identisch ist mit der Energiedichte, welche die Komponente (4, 4) eines symmetrischen Tensors ist, den ich kurz den Energietensor nennen will, so kann man von einer Identität oder einer Wesensgleichheit der beiden Massen nur dann reden, wenn auch die schwere Masse in der Form eines Tensors auftritt, eines Tensors, der völlig identisch sein soll mit dem Energietensor. Wir haben soeben ganz allgemein die Form der Grundgleichungen kennen gelernt für eine Theorie, in welcher die Dichtigkeit der schweren Masse ein Tensor ist: $(h_{\mu\nu})$. Bezeichnen wir nun die Komponenten des Energietensors mit $T_{\mu\nu}$, so lautet das Prinzip von der Identität der schweren und der trägen Masse:

$$h_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \qquad (9)$$

Wenn dieses Prinzip erfüllt wäre, so wären für einen ruhenden materiellen Körper (ein vollständiges stationäres System) nach dem Laueschen Satz[1]) alle Komponenten $m^{\mathfrak{g}}_{\mu\nu}$ der schweren Masse gleich Null, mit Ausnahme von $m^{\mathfrak{g}}_{44}$, und zwar wäre $m^{\mathfrak{g}}_{44} = m_{\mathfrak{t}}$, wenn ich die träge Masse des Körpers $m_{\mathfrak{t}}$ nenne (inertia). Die Schwerkraft, die der Körper in dem Schwerefeld $(\mathfrak{g}_{\mu\nu}, i \cdot u_{\mu\nu})$ erfährt, wäre dann also:

$$\mathfrak{P} = \varkappa \cdot \mathfrak{g}_{44} \cdot m_{\mathfrak{t}}.$$

Es wären demnach in einem und demselben Schwerefeld die Gravitationskräfte auf verschiedene Körper, die denselben Bewegungszustand haben, streng proportional mit ihren trägen Massen.

Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß die Identität $h_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, die das besprochene Prinzip verlangt, unmöglich ist. Ich werde beweisen, daß sich keine Funktion H von den $\omega_{\mu\nu}$ finden läßt, welche die Differentialgleichungen (6) in der von dem Prinzip der Identität beider Massen vorgeschriebenen Form:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{\mu\nu}} = -\varkappa T_{\mu\nu} \qquad (10)$$

erfüllte.

Wäre die Gleichung (10) erfüllt, so müßte auch gelten:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial \omega_{\varkappa\lambda}} = \frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial \omega_{\mu\nu}}. \qquad (11)$$

Nun habe ich in meiner Arbeit über die Theorie der Materie [Teil III, S. 34, Gl. (105)] gezeigt, daß man den Energietensor sehr einfach mit Hilfe einer Größe Φ hinschreiben kann, die ähnlich wie H eine Funktion des Ätherzustandes in dem betreffenden Raum-Zeitpunkt ist. Allerdings hat man, wenn man mit Φ rechnet, andere Größen zur Beschreibung des Ätherzustandes zu wählen, als beim Rechnen mit H. Ich will die richtig gewählten Größen, ohne Rücksicht auf ihre physikalische Bedeutung, einfach nach ihrer Zusammengehörigkeit mit den vier Koordinatenachsen ordnen und sie

1) M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl., S. 209. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig 1913.

mit x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4; z_1, z_2, z_3, z_4 usf. bezeichnen. Dann lassen sich die Komponenten des Energietensors durch das folgende Schema darstellen:

$$\left.\begin{aligned} T_{11} &= \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\cdot x_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\cdot y_1 - \cdots \\ T_{21} &= \quad - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\cdot x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\cdot y_2 - \cdots \end{aligned}\right| \qquad (12)$$

Nennen wir die Zustandsgrößen, mit denen wir bei Benutzung der Funktion H rechnen: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$; $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$; $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ usf., so folgt aus der Definition von Φ [Theorie der Materie, Teil III, Formel (98) und (93) auf S. 32 und 30] folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \omega_{\mu\nu}} H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \omega_{11}, \omega_{12}, \ldots) = \frac{\partial}{\partial \omega_{\mu\nu}} \Phi(x_1, x_2, \ldots, \omega_{11}, \omega_{12}, \ldots).$$

Durch Differentiation von (12) ergibt sich demnach, wenn man (10) benutzt:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T_{11}}{\partial \omega_{21}} = -T_{21} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}\cdot x_1 + \frac{\partial T_{21}}{\partial y_1}\cdot y_1 + \cdots$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T_{21}}{\partial \omega_{11}} = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}\cdot x_2 + \frac{\partial T_{11}}{\partial y_1}\cdot y_2 + \cdots.$$

Es ist aber leicht zu sehen, daß

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}\cdot x_2 + \frac{\partial T_{11}}{\partial y_1}\cdot y_2 + \cdots = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}\cdot x_1 + \frac{\partial T_{21}}{\partial y_1}\cdot y_1 + \cdots.$$

Demnach folgt aus der Gleichung (10) auch:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \omega_{21}} + 2\cdot T_{21} = \frac{\partial T_{21}}{\partial \omega_{11}}. \qquad (13)$$

Gleichung (11) und Gleichung (13) können nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn $T_{21} = 0$ ist. Genau derselbe Beweis läßt sich für jedes beliebige $T_{\mu\nu}$ führen ($\mu \neq \nu$). Es ergibt sich also aus dem Prinzip der Identität beider Massen die Folgerung, daß alle Komponenten des Energietensors außer der Diagonale gleich Null sind. Das wäre aber nur dann möglich, wenn der Energietensor in Wirklichkeit ein Skalar wäre. Damit ist die Unmöglichkeit des Prinzips der Identität beider Massen bewiesen.

Das Prinzip der Identität von schwerer und träger Masse ist auch in einer Theorie, in welcher das Gravitationspotential und die Dichte der schweren Masse vierdimensionale Tensoren sind, unmöglich.

In der Tat lehrt ein Blick auf die Formeln (15), (18) sowie (19) auf S. 16 und 17 der Einsteinschen Abhandlung, daß auch in der Einsteinschen Theorie der Tensor der Dichtigkeit der schweren Masse, der in den Formeln (15) und (18) zu finden ist, durchaus verschieden von dem Energietensor ist, der in (19) angegeben wird. Es ist also ein Irrtum, wenn Herr Einstein in der zitierten Abhandlung von einer „physikalischen Wesensgleichheit der schweren und der trägen Masse" in seiner Theorie spricht und von der Gültigkeit der „Äquivalenzhypothese", nach welcher „die Identität der trägen und der schweren Masse exakt erfüllt ist".

Immerhin besteht aber noch die Möglichkeit, daß die träge und die schwere Masse für große aus Molekülen zusammengesetzte Körper einander streng proportional gemacht werden können, indem man eine Reihe von Hilfsannahmen macht, die dazu führen, daß in dem Integral über das ganze Volumen des zusammengesetzten Körpers die Abweichungen in den einzelnen Elementarteilchen sich gerade gegenseitig kompensieren. Es scheint mir, als ob Herr Einstein in seinem Wiener Vortrag[1]) in der Tat nur noch an diese Möglichkeit gedacht hat, als er die Gleichheit der trägen und der schweren Masse für „abgeschlossene Systeme" postulierte (§ 2, Postulat 2).

An und für sich ist es allerdings wohl ziemlich gleichgültig, ob man auf eine solche etwas künstliche Art die beiden Massen für abgeschlossene Systeme mathematisch genau gleich bekommt, oder ob sie nur angenähert gleich sind, wenn man einmal im Prinzip die Identität der beiden Massen aufgegeben hat, womit denn doch eigentlich zugleich auch die Gedanken über allgemeine Relativität der Bewegungen, von denen Herr Einstein in seinem Vortrage so ausführlich gesprochen hat, aufgegeben sind.

Da indessen Herr Einstein so sehr großes Gewicht darauf legt, daß in seiner Theorie der Satz von der Gleichheit beider Massen wenigstens für abgeschlossene Systeme noch gelte, so sind wir genötigt, bei einer Besprechung seiner Theorie näher auf diesen Satz einzugehen.

4. Spezielle Annahmen der Einsteinschen Theorie. Herr Einstein braucht in seiner zitierten Arbeit für die Komponenten des Gravitationspotentials die Bezeichnung $g_{\mu\nu}$. Die Größen, die wir [Gl. (1)] mit $\omega_{\mu\nu}$ bezeichnet haben, unterscheiden sich von den $g_{\mu\nu}$ nur um einen konstanten Faktor:

$$g_{\mu\nu} = -2\varkappa\cdot\omega_{\mu\nu}. \qquad (14)$$

In einer Gegend, die von aller Materie unendlich weit entfernt ist, also im idealen Vakuum, soll der Tensor $(g_{\mu\nu})$ in den Skalar -1 degenerieren, sollen also seine einzelnen Komponenten die folgenden Werte annehmen:

1) Diese Zeitschr. 14, 1249, 1913.

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Ich setze die Lichtgeschwindigkeit im idealen Vakuum nach Minkowski stets gleich 1. Um zu der speziellen Einsteinschen Theorie zu kommen, muß man die folgenden Annahmen machen:

1. Die Hamiltonsche Funktion H soll sich in zwei Summanden zerlegen lassen, $H = H_\varepsilon + H_g$, die alle beide von den Komponenten des Gravitationspotentials, also von den Größen $g_{\mu\nu}$ abhängen, von denen aber der zweite H_g außerdem nur noch die Komponenten des Tensorenvektors des Gravitationsfeldes ($\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, $i \cdot \mathfrak{u}_{\mu\nu}$) enthält und der erste H_ε nur noch die übrigen Zustandsgrößen, z. B. die elektromagnetischen Feldgrößen usw.

2. Die Form der Abhängigkeit der Größe H_ε von den $g_{\mu\nu}$ soll durch den folgenden Ausdruck gegeben sein:

$$\left.\begin{aligned} H_\varepsilon &= \sqrt{g_{11} X_{11} + g_{22} X_{22} + \cdots + 2 g_{12} X_{12} + \cdots)} \\ H_\varepsilon &= \sqrt{\textstyle\sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} \cdot X_{\mu\nu}}, \end{aligned}\right| \quad (15)$$

wo die $X_{\mu\nu}$ nicht mehr die $g_{\mu\nu}$ enthalten, sondern nur die anderen Zustandsgrößen des Äthers. Die $X_{\mu\nu}$ bilden die Komponenten eines vierdimensionalen Tensors, H_ε ist dann ein vierdimensionaler Skalar.

3. Der Tensor $(X_{\mu\nu})$ soll sich im Fall der Ruhe des betrachteten materiellen Teilchens auf einen Tensor reduzieren, dessen sämtliche Komponenten außer X_{44} Null sind. Wir wollen diesen Wert X_{44}^0 nach Einstein durch $-\varrho^2$ bezeichnen:

$$X_{44}^0 = -\varrho^2.$$

Die Größe ϱ ist also ein vierdimensionaler Skalar. Bewegt sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit q, so definieren wir in der üblichen Weise als den Vierervektor der Geschwindigkeit folgende Größe $\mathfrak{V}$:

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{q_x}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \mathfrak{V}_2 = \frac{q_y}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \mathfrak{V}_3 = \frac{q_z}{\sqrt{1-q^2}},$$

$$\mathfrak{V}_4 = \frac{i}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \mathfrak{V}_1^2 + \mathfrak{V}_2^2 + \mathfrak{V}_3^2 + \mathfrak{V}_4^2 = -1.$$

Aus dem Relativitätsprinzip folgt dann ohne weiteres, daß die Komponenten des Tensors $(X_{\mu\nu})$ im Falle der Bewegung des betrachteten Teilchens die folgenden Werte annehmen:

$$X_{\mu\nu} = +\varrho^2 \cdot \mathfrak{V}_\mu \cdot \mathfrak{V}_\nu. \quad (16)$$

Der erste Summand der Hamiltonschen Funktion hat demnach den Wert:

$$\left.\begin{aligned} H_\varepsilon &= \varrho \cdot \\ &\sqrt{(g_{11} \cdot \mathfrak{V}_1^2 + g_{22} \cdot \mathfrak{V}_2^2 + \cdots + 2 g_{12} \cdot \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 + \cdots)} \\ H_\varepsilon &= \varrho \cdot \sqrt{\textstyle\sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} \cdot \mathfrak{V}_\mu \cdot \mathfrak{V}_\nu}, \end{aligned}\right| \quad (17)$$

H_ε und ϱ sind vierdimensionale Skalare, ebenso auch der Wurzelausdruck in Gl. (16), es ist also:

$$\textstyle\sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} \cdot \mathfrak{V}_\mu \cdot \mathfrak{V}_\nu = -g_{44}^0. \quad (18)$$

4. Der zweite Summand der Hamiltonschen Funktion H_g soll eine homogene Funktion zweiten Grades der Komponenten des Tensorenvektors ($\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, $i\mathfrak{u}_{\mu\nu}$) sein. Setzen wir der Einfachheit halber für die Größen $\mathfrak{g}_{\mu\nu 1}$, $\mathfrak{g}_{\mu\nu 2}$, $\mathfrak{g}_{\mu\nu 3}$, $i\mathfrak{u}_{\mu\nu}$ die Zeichen: $\mathfrak{g}_{\mu\nu 1}$, $\mathfrak{g}_{\mu\nu 2}$, $\mathfrak{g}_{\mu\nu 3}$, $\mathfrak{g}_{\mu\nu 4}$, so soll also H_g ein Ausdruck von der folgenden Form

$$H_g = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\varkappa,\mu,\lambda,\nu,\alpha,\beta}^{1\ldots 4} G_{\varkappa\mu\lambda\nu\alpha\beta} \cdot \mathfrak{g}_{\varkappa\lambda\alpha} \cdot \mathfrak{g}_{\mu\nu\beta}, \quad (19)$$

sein, wo über jeden der sechs Indizes einzeln von 1 bis 4 zu summieren ist. Die Koeffizienten $G_{\varkappa\mu\lambda\nu\alpha\beta}$ sind Funktionen des Gravitationspotentials, also der Größen $g_{\mu\nu}$, über die wir bestimmte Festsetzungen treffen müssen, um die Einsteinsche Theorie zu bekommen.

5. Wir nennen den Tensor $(\gamma_{\mu\nu})$, der durch die folgenden Gleichungen definiert ist:

$$\left.\begin{aligned} g_{1\nu} \cdot \gamma_{1\nu} + g_{2\nu} \cdot \gamma_{2\nu} + g_{3\nu} \cdot \gamma_{3\nu} + g_{4\nu} \cdot \gamma_{4\nu} &= 1 \\ g_{1\mu} \cdot \gamma_{1\nu} + g_{2\mu} \cdot \gamma_{2\nu} + g_{3\mu} \cdot \gamma_{3\nu} + g_{4\mu} \cdot \gamma_{4\nu} &= 0 \\ \mu &\neq \nu \end{aligned}\right| \quad (20)$$

den zu $(g_{\mu\nu})$ reziproken Tensor. Es sei ferner:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \quad (21)$$

Dann läßt sich $\gamma_{\mu\nu}$ berechnen als die zu $g_{\mu\nu}$ adjungierte Unterdeterminante von g, dividiert durch g[1]). Wir wollen nun festsetzen:

$$G_{\varkappa\mu\lambda\nu\alpha\beta} = 2\varkappa \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\varkappa\mu} \cdot \gamma_{\lambda\nu} \cdot \gamma_{\alpha\beta}. \quad (22)$$

5. Die Grundgleichungen der Einsteinschen Theorie. Ehe wir den Ausdruck, der sich nach den eben gemachten Festsetzungen für H ergibt, in die allgemeinen Gleichungen (1) und (2) gemäß (5) und (6) einführen, wollen wir einige einfache Formeln notieren, die sich ohne weiteres aus den Definitionsgleichungen (20) der $\gamma_{\mu\nu}$ ergeben, und die für die folgenden Rechnungen sehr bequem sind. Durch Differentiation von (20) nach irgendeiner Koordinate x_β ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} &g_1 \cdot \frac{\partial \gamma_{1\nu}}{\partial x_\beta} + g_{2\lambda} \cdot \frac{\partial \gamma_{2\nu}}{\partial x_\beta} + g_{3\lambda} \cdot \frac{\partial \gamma_{3\nu}}{\partial x_\beta} + \\ &\qquad + g_{4\lambda} \cdot \frac{\partial \gamma_{4\nu}}{\partial x_\beta} = \\ &-\left(\gamma_{1\nu} \cdot \frac{\partial g_{1\lambda}}{\partial x_\beta} + \gamma_{2\nu} \cdot \frac{\partial g_{2\lambda}}{\partial x_\beta} + \gamma_{3\nu} \cdot \frac{\partial g_{3\lambda}}{\partial x_\beta} + \right. \\ &\qquad \left. + \gamma_{4\nu} \cdot \frac{\partial g_{4\lambda}}{\partial x_\beta}\right) \end{aligned}\right| \quad (23)$$

sowohl für $\lambda = \nu$, wie für $\lambda \neq \nu$.

1) Das Vorzeichen von g ist bei mir positiv. Bei

Wir schreiben nun die 4 Gleichungen (23) für einen bestimmten Wert ν hin, indem wir der Reihe nach $\lambda = 1, 2, 3, 4$ setzen, multiplizieren jede Gleichung mit $\gamma_{\mu\lambda}$, wo μ eine zweite konstante Zahl ist, die von ν verschieden oder auch gleich ν sein darf, und addieren dann. Es ergibt sich:

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} = -\sum_1^4 \sum_1^4 \gamma_{\mu\lambda} \cdot \gamma_{\varkappa\nu} \cdot \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x_\beta}. \quad (24)$$

Differenzieren wir (20) nach irgendeinem g_{mn}, wobei wir g_{mn} und g_{nm} als verschiedene Variable behandeln, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^4 g_{\varkappa\lambda} \cdot \frac{\partial \gamma_{\varkappa\nu}}{\partial g_{mn}} &= 0, \quad \lambda \neq n \\ \sum_1^4 g_{\varkappa n} \cdot \frac{\partial \gamma_{\varkappa\nu}}{\partial g_{mn}} + \gamma_{m\nu} &= 0. \end{aligned}\right| \quad (25)$$

Hält man ν fest, multipliziert die vier Gleichungen für $\lambda = 1, 2, 3, 4$ mit $\gamma_{\mu\lambda}$ und addiert, so erhält man:

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial g_{mn}} + \gamma_{m\nu} \cdot \gamma_{\mu n} = 0. \quad (26)$$

Endlich wollen wir die Determinante g nach g_{mn} differenzieren, wobei wir auch wieder g_{mn} und g_{nm} als verschiedene Variable behandeln:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{mn}} = g \cdot \gamma_{mn}. \quad (27)$$

Aus (27) folgt:

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g_{mn}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{mn}. \quad (28)$$

Nach diesen Vorbereitungen berechnen wir nun zuerst den Tensorenvektor ($\mathfrak{k}_{mn}$, $i \cdot w_{mn}$) und darauf den Tensor der schweren Masse h_{mn}.

Ich werde die vier Größen $\mathfrak{k}_{mnx}$, $\mathfrak{k}_{mny}$, $\mathfrak{k}_{mnz}$, $i \cdot w_{mn}$ der Einfachheit halber $\mathfrak{k}_{mn1}$, $\mathfrak{k}_{mn2}$, $\mathfrak{k}_{mn3}$, $\mathfrak{k}_{mn4}$ nennen. Man bekommt dann nach (5) und (19):

$$\mathfrak{k}_{mn\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}_{mn\alpha}} = \sum_{\mu\nu\beta} G_{m\mu n\nu\alpha\beta} \cdot \mathfrak{g}_{\mu\nu\beta}.$$

Dabei sind wieder die $\mathfrak{k}_{mn}$ und $\mathfrak{k}_{nm}$ sowohl als auch die $\mathfrak{g}_{mn}$ und $\mathfrak{g}_{nm}$ als verschiedene Variable betrachtet, nach der Differentiation aber ist $G_{m\mu n\nu\alpha\beta} = G_{\mu m\nu n\beta\alpha}$ gesetzt. Schreiben wir nun nach (1) und (14):

$$\mathfrak{g}_{mn\beta} = -\frac{1}{2\varkappa} \cdot \frac{\partial g_{mn}}{\partial x_\beta},$$

so finden wir mit Benutzung der Formeln (22) und (24):

$$\mathfrak{k}_{mn\alpha} = \sum_1^4 \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \gamma_{mn}}{\partial x_\beta}. \quad (29)$$

Es ist derselbe Tensorenvektor, der bei Einstein in der Differentialgleichung des Gravitationsfeldes (15) und (18) auf S. 16 und 17 auftritt. Es ist leicht zu sehen, daß man H_g in folgender Form schreiben kann:

$$H_g = \frac{1}{2} \sum_{mn\alpha} \mathfrak{k}_{mn\alpha} \cdot \mathfrak{g}_{mn\alpha}. \quad (30)$$

Wir gehen nun zur Berechnung von h_{mn} über. Nach (6) und (14) ist:

$$h_{mn} = -\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial H}{\partial w_{mn}} = +2 \cdot \frac{\partial H}{\partial g_{mn}}. \quad (31)$$

Da $H = H_e + H_g$, so zerfällt auch h_{mn} in zwei Summanden: $h_{mn} = h^e_{mn} + h^g_{mn}$. Nach (16) und (17) ist:

$$\left.\begin{aligned} h^e_{mn} &= \frac{\varrho \cdot \mathfrak{B}_m \cdot \mathfrak{B}_n}{\sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \cdot \mathfrak{B}_\mu \cdot \mathfrak{B}_\nu}} \\ h^e_{mn} &= \frac{\varrho}{\sqrt{-g^0_{44}}} \mathfrak{B}_m \cdot \mathfrak{B}_n. \end{aligned}\right| \quad (32)$$

h^e_{mn} hat also die Form $h^e_{mn} = h \cdot \mathfrak{B}_m \cdot \mathfrak{B}_n$, wo $h = \varrho / \sqrt{-g^0_{44}}$ ein vierdimensionaler Skalar ist. Um (32) mit dem Einsteinschen Ausdruck für h^e_{mn} zu vergleichen, setze ich (Einstein, Gleichung 1", S. 6):

$$\sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \cdot dx_\mu \cdot dx_\nu} = ds;$$

ist ferner dV ein Volumenelement in dem betrachteten Raum-Zeitpunkt, so ist das Ruhvolumen dV' des Massenteilchens, das das Volumen dV erfüllt:

$$dV' = \frac{dV}{\sqrt{1 - q^2}},$$

und ich definiere:

$$dm = \varrho \cdot dV' = \varrho \cdot \frac{dV}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Ferner setze ich nach Einstein (S. 10):

$$dV_0 = \sqrt{g} \cdot \frac{dV}{\frac{ds}{dt}}$$

und

$$\varrho_0 = \frac{dm}{dV_0} = \frac{\varrho}{\sqrt{g} \cdot \sqrt{1 - q^2}} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Man hat dann:

$$h^e_{mn} = \varrho_0 \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{dx_m}{ds} \cdot \frac{dx_n}{ds}$$

oder wenn man nach Einstein (S. 10) setzt[1]):

$$\Theta_{mn} = -\varrho_0 \cdot \frac{dx_m}{ds} \cdot \frac{dx_n}{ds},$$

Einstein sind einige Vorzeichen anders als bei mir, weil er $x_4 = t$ setzt, während ich $x_4 = it$ setze.

1) Ich nehme das Vorzeichen Minus, damit Θ_{44} positiv wird

so hat man:

$$h^{\varepsilon}_{mn} = -\sqrt{g}\cdot\Theta_{mn} \qquad (33)$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (15) und (18) bei Einstein.

Ich berechne nun den zweiten Summanden von h_{mn}. Nach (19) und (31) ist:

$$h^{\varepsilon}_{mn} = \sum_{\varkappa,\mu,\lambda,\nu,\alpha,\beta} \frac{\partial G_{\varkappa\mu\lambda\nu\alpha\beta}}{\partial g_{mn}}\cdot\mathfrak{G}_{\varkappa\lambda\alpha}\cdot\mathfrak{G}_{\mu\nu\beta},$$

wo

$$G_{\varkappa\mu\lambda\nu\alpha\beta} = 2\varkappa\cdot\sqrt{g}\cdot\gamma_{\varkappa\mu}\cdot\gamma_{\lambda\nu}\cdot\gamma_{\alpha\beta}.$$

Bei der Differentiation ist zwischen g_{mn} und g_{nm} zu unterscheiden. Die Formeln (26) und (28) ergeben:

$$\frac{\partial G_{\varkappa\mu\lambda\nu\alpha\beta}}{\partial g_{mn}} = \varkappa\cdot\sqrt{g}\cdot\gamma_{mn}\cdot\gamma_{\varkappa\mu}\cdot\gamma_{\lambda\nu}\cdot\gamma_{\alpha\beta} - 2\varkappa\cdot\sqrt{g}\cdot\gamma_{\alpha n}\cdot\gamma_{m\beta}\cdot\gamma_{\varkappa\mu}\cdot\gamma_{\lambda\nu} - 2\varkappa\cdot\sqrt{g}\cdot(\gamma_{\alpha\beta}\cdot\gamma_{\lambda n}\cdot\gamma_{m\nu}\cdot\gamma_{\varkappa\mu} + \gamma_{\alpha\beta}\cdot\gamma_{\varkappa n}\cdot\gamma_{m\mu}\cdot\gamma_{\lambda\nu}).$$

Setzt man ferner:

$$\mathfrak{G}_{\varkappa\lambda\alpha} = -\frac{1}{2\varkappa}\cdot\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x_\alpha}, \qquad \mathfrak{G}_{\mu\nu\beta} = -\frac{1}{2\varkappa}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta},$$

und beachtet man, daß $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$, so findet man mit Hilfe der Formeln (24):

$$\left.\begin{aligned} h^{\varepsilon}_{mn} = &-\frac{\sqrt{g}}{4\varkappa}\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}\gamma_{mn}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \\ &+\frac{\sqrt{g}}{2\varkappa}\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha m}\cdot\gamma_{\beta n}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \\ &+\frac{\sqrt{g}}{\varkappa}\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}\gamma_{m\nu}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu n}}{\partial x_\beta}, \end{aligned}\right| \qquad (34)$$

oder auch nach Formel (23):

$$\begin{aligned} h^{\varepsilon}_{mn} = &-\frac{\sqrt{g}}{4\varkappa}\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}\gamma_{mn}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \\ &+\frac{\sqrt{g}}{2\varkappa}\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha m}\cdot\gamma_{\beta n}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \\ &-\frac{\sqrt{g}}{\varkappa}\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}g_{\mu\nu}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial\gamma_{m\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu n}}{\partial x_\beta}. \end{aligned}$$

Diese letzte Form benutzt Einstein, er faßt die beiden ersten Summanden zusammen und nennt ihre Summe: $-\sqrt{g}\cdot\vartheta_{mn}$ [Einstein, S. 15, Formel (13)] und schreibt:

$$\left.\begin{aligned} h^{\varepsilon}_{mn} = -\sqrt{g}\cdot\Big(&\vartheta_{mn} + \frac{1}{\varkappa}\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha\beta}\cdot g_{\mu\nu}\cdot \\ &\cdot\frac{\partial\gamma_{m\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu n}}{\partial x_\beta}\Big). \end{aligned}\right| \qquad (35)$$

In den Bezeichnungen von Einstein geschrieben, ist also die Dichte der schweren Masse im ganzen:

$$\left.\begin{aligned} h_{mn} = -\sqrt{g}\cdot\Big(&\Theta_{mn} + \vartheta_{mn} + \frac{1}{\varkappa}\cdot \\ &\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}\gamma_{\alpha\beta}\cdot g_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial\gamma_{m\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu n}}{\partial x_\beta}\Big). \end{aligned}\right| \qquad (36)$$

Nimmt man dazu Formel (29):

$$\mathfrak{k}_{mn\alpha} = \sum\nolimits_\beta \sqrt{g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial\gamma_{mn}}{\partial x_\beta},$$

so sieht man sofort, daß die Einsteinsche Fundamentalgleichung (15) und (18) auf S. 16 und 17 nichts anderes ist als unsere Gleichung (2):

$$\sum\nolimits_\alpha \frac{\partial\mathfrak{k}_{mn\alpha}}{\partial x_\alpha} = -\varkappa\cdot h_{mn}.$$

Die Einsteinsche Gravitationstheorie ist ein Spezialfall der in Abschnitt 2 dargestellten allgemeinen Theorie der Gravitation mit Tensorpotential. Sie fügt sich also in den Rahmen der gewöhnlichen Relativitätstheorie vollkommen ein.

6. Der Energietensor. Um den Energietensor aufzustellen, fügt Einstein zu den in Abschnitt **4** aufgezählten Annahmen eine weitere Nebenannahme hinzu, die uns im weiteren Verlauf unserer Untersuchung besonders wichtig werden wird. Wir wollen einen neuen Vierervektor $\mathfrak{W}$ folgendermaßen definieren:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W}_\rho &= \frac{\partial H_e}{\partial\mathfrak{B}_\nu} = \frac{\varrho\cdot\sum_\mu g_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{B}_\mu}{\sqrt{\sum_\mu\sum_\nu g_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{B}_\mu\cdot\mathfrak{B}_\nu}}, \\ \mathfrak{W}_\nu &= \frac{\varrho}{\sqrt{-g_{44}}}\cdot\sum_1^4\mu g_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{B}_\mu. \end{aligned}\right| \qquad (37)$$

Die neue Nebenannahme Einsteins ist nun:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{W}_\mu\cdot\mathfrak{B}_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{W}_\mu\cdot\mathfrak{B}_2) + \\ &+\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{W}_\mu\cdot\mathfrak{B}_3) - i\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{W}_\mu\cdot\mathfrak{B}_4) = \\ &= -\varkappa\cdot\sum_{m,n}\vartheta_{mn\mu}\cdot h'_{mn} = \\ &= \sum_{m,n}\frac{\partial H_e}{\partial g_{mn}}\cdot\frac{\partial g_{mn}}{\partial x_\mu}. \end{aligned}\right| \qquad (38)$$

Diese Nebenannahme bezeichnet Einstein als den „Impuls-Energie-Satz". Sie findet sich in seiner Abhandlung auf S. 10 als Gleichung (10) und hat hier die Form:

$$\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{g}\cdot g_{\alpha\mu}\cdot\Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\cdot\sum_{\mu,\nu}\sqrt{g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\Theta_{\mu\nu} = 0.$$

Beachtet man, daß zufolge unserer Gleichungen (32) und (33):

$$\mathfrak{W}_\alpha \cdot \mathfrak{V}_\nu = -\sqrt{g} \cdot \sum^\mu g_{\alpha\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu},$$

und nach (31) und (33):

$$\frac{\partial H_e}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{g} \cdot \Theta_{\mu\nu},$$

so sieht man sofort, daß diese Gleichung mit (38) identisch ist.

Nimmt man (38) als richtig an, so findet man leicht, daß die Komponenten des folgendermaßen definierten Tensors:

$$\left.\begin{aligned} T_{\alpha\alpha} &= \mathfrak{W}_\alpha \cdot \mathfrak{V}_\alpha + H_g - \sum^\mu \sum^\nu \mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha}, \\ T_{\alpha\beta} &= \mathfrak{W}_\alpha \cdot \mathfrak{V}_\beta - \sum^\mu \sum^\nu \mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu\beta} \end{aligned}\right| \quad (39)$$

die Differentialgleichungen befriedigen:

$$\frac{\partial T_{\alpha 1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\alpha 2}}{\partial y} + \frac{\partial T_{\alpha 3}}{\partial z} - i \cdot \frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t} = 0, \quad (40)$$

zum Beweise braucht man die Gleichungen (38), (1), (2), (5), (6). Der Tensor (39) ist also der Energietensor, die Gleichungen (40) sind die Impuls-Energie-Gleichungen. Eine kleine Rechnung zeigt, daß die Gleichungen (40) identisch sind mit den Gleichungen (19) auf S. 17 bei Einstein:

$$\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot (\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu})\right) = 0.$$

$$(\sigma = 1, 2, 3, 4.)$$

In einem gravitationsfreien Raum, wo $g_{\nu\nu} = -1$, $g_{\mu\nu} = 0$, $\mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha} = 0$, nehmen die Komponenten des Energietensors die folgenden Werte an:

$$T_{\alpha\alpha}' = -\varrho \cdot \mathfrak{W}_\alpha^2, \quad T_{\alpha\beta}' = -\varrho \cdot \mathfrak{W}_\alpha \cdot \mathfrak{V}_\beta.$$

Der auf S. 17 eingeführte Tensor $(X_{\mu\nu})$ unterscheidet sich also nach Gleichung (16) im gravitationsfreien Raum von dem Energietensor $(T_{\mu\nu}')$ nur durch den Faktor $-\varrho$,

$$X_{\mu\nu} = -\varrho \cdot T_{\mu\nu}'.$$

Zerlegt man die Komponenten des Energietensors in derselben Weise wie $H = H_e + H_g$ in zwei Summanden

$$T_{\alpha\beta}' = T_{\alpha\beta}^e + T_{\alpha\beta}^g,$$

wo

$$T_{\alpha\beta}^e = \mathfrak{W}_\alpha \cdot \mathfrak{V}_\beta$$

und

$$T_{\alpha\beta}^g = -\sum_{\mu,\nu} \mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu\beta},$$

bzw.

$$T_{\alpha\alpha}^g = H_g - \sum_{\mu,\nu} \mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha},$$

so bemerkt man leicht, daß aus (16) und (37) der Satz folgt:

$$H_e = T_{11}^e + T_{22}^e + T_{33}^e + T_{44}^e. \quad (41)$$

Die Nebenannahmen der Einsteinschen Theorie (16) und (38) ergeben, daß der Teil H_e der Hamiltonschen Funktion, der die Feldstärke der Gravitation nicht enthält, identisch wird mit der Summe der Diagonalglieder des von der Feldstärke der Gravitation freien Teiles des Energietensors. (Schluß folgt im nächsten Heft.)

(Eingegangen 28. Dezember 1913.)

Über das elektrische Analogon des Zeeman-Phänomens.

Von Antonino Lo Surdo.

Seit dem letzten Sommer war ich bemüht, die angeblich in einer Vakuumröhre von der Kathode her rückgehenden positiven Strahlen durch Beobachtung des Doppler-Effekts nachzuweisen.

Es zeigte sich dabei, daß bei sehr dünnen, einfach zylindrischen Röhren die Wasserstofflinien als in merkwürdiger Weise aufgelöst vorkamen; die Erscheinung war sogar eine recht deutliche, wenn die Röhren zur Achse des Kollimators senkrecht lagen.

Als nun Prof. Stark in der Nature vom 4. Dezember die Entdeckung des elektrischen Analogons des Zeeman-Effekts bekannt machte, war mir klar, daß ich eben dieselbe Erscheinung beobachtet hatte. Die der Entstehung des Phänomens günstigen Bedingungen wurden in der Weise bei meinen Versuchen erfüllt, daß in dünnen Röhren der Potentialabfall in einem engen Raume, dicht an der Kathode, vor sich geht.

In der Tat, bei Benutzung einer Kalkspatplatte, konnte ich leicht feststellen, daß, wie durch Starks sinnreiche Anordnung[1]), in jeder Vakuumröhre, wenn nur der innere Durchmesser genügend klein ist, die H_γ-Wasserstofflinie in fünf Komponenten aufgelöst sich zeigt. Die mittleren Komponenten schwingen dabei dem Felde senkrecht, die äußeren aber parallel dazu.

Dies gilt, wie leicht zu verstehen, für transversale Beobachtung. Es gestattet aber meine Methode, den longitudinalen Effekt ohne jede Schwierigkeit zu untersuchen. Dann werden nur drei unpolarisierte Komponenten wahrgenommen.

1) J. Stark, Sitz.-Ber. der Kgl. Preuß. Akademie d. Wissensch. **47**, 932, 1913.

Florenz, Physikalisches Institut der K. Hochschule, den 4. Januar 1914.

(Eingegangen 7. Januar 1914.)

Theoretisches über das elektrische Analogon des Zeemanphänomens.

Von Antonio Garbasso.

Die Spektrallinien, die von einem ionisierten Gase emittiert werden, lösen sich in je drei bzw. fünf Komponenten auf, wenn die Träger in einem starken elektrischen Felde sich befinden.

Im zweiten Falle schwingen die mittleren Komponenten dem Felde senkrecht, die äußeren aber parallel dazu.

Zur Beobachtung werden nach Stark die durch Glimmentladung gebildeten Träger in ein sekundäres Feld eingeführt. Man kann aber, nach Lo Surdo, die Erscheinung an dünnen Röhren sehr leicht beobachten; bei solchen Röhren geht nämlich der Potentialabfall in einem engen Raume dicht an der Kathode vor sich.

Durch J. J. Thomsons Modell der materiellen Atome ist der neue Effekt in keiner Weise darzustellen. Setzt man voraus, wie es W. Voigt vor zwölf Jahren getan[1]), daß die Raumdichte ϱ der elektrischen Verteilung in der positiven Kugel eine bloße Funktion des Abstandes r vom Mittelpunkte ist, so nehmen die Bewegungsgleichungen die Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi e}{m}\cdot\left[\frac{\varrho_0}{3}\cdot r + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)_0\cdot r^2 + \cdots\right]\cdot\frac{x}{r},$$

an.

Zur Erklärung des Zeemanphänomens muß man aber

$$\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)_0 = 0$$

setzen, und dadurch, unter Vernachlässigung höherer Glieder, werden die Gleichungen zu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi e}{m}\cdot\left[\frac{\varrho_0}{3}\cdot r + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{d^2\varrho}{dr^2}\right)_0 r^3\right]\cdot\frac{x}{r}.$$

Es ist nun leicht, zu beweisen, daß diese Gleichungen eben die Entstehung eines Dubletts bedingen, dessen beide Komponenten aber nach derselben Seite der ungestörten Linie verschoben erscheinen.

Zur Erklärung des Stark-Lo Surdoschen Effekts hätte man also, wie leicht zu sehen, etwa dreierlei Wasserstoffatome anzunehmen, was wohl als unwahrscheinlich zu bezeichnen wäre.

Bohrs Theorie des Rutherfordschen Modells gestattet dagegen, die Entstehung und Lage der äußeren Komponenten zu berechnen.

Geht die Erscheinung der Lichtemission in einem elektrischen Felde vor sich, so muß man die Bohrschen Gleichungen[1])

$$W_n = \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2},$$

$$\omega_n = \frac{4\pi^2 m e^4}{n^3 h^3},$$

$$a_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2},$$

durch die neuen Gleichungen

$$W_n = \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2} \pm 3\varepsilon,$$

$$\omega_n = \frac{4\pi^2 m e^4}{n^3 h^3} \pm \frac{6}{nh}\cdot\varepsilon,$$

$$a_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2} \pm \frac{n^4 h^4}{4\pi^4 m^2 e^6}\varepsilon$$

ersetzen. Hier ist mit ε die während der Wiederbildung des Atoms vom äußeren Felde geleistete Arbeit gemeint.

Nach der dritten von diesen Gleichungen löst sich jede mögliche Bahn in zwei solche auf: die gestörten Bahnen müssen aber, wie eine einfache Überlegung lehrt, der ungestörten sehr nahe liegen. Wir dürfen also die beim Überspringen des Elektrons vom äußeren Felde (F) geleistete Arbeit durch die dritte der Bohrschen Gleichungen berechnen.

Damit werden die Frequenzen des der elektrischen Kraft parallelschwingenden Dubletts zu

$$\nu_{q,p} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right) \pm \frac{3}{h}(\varepsilon_p - \varepsilon_q),$$

und es ist

$$\varepsilon_p - \varepsilon_q = \frac{Feh^2}{4\pi^2 m e^2}(q^2 - p^2).$$

Für ein Feld von 13000 Volt/cm, und für die Wasserstofflinie H_β berechnet sich hieraus die Breite des dem Felde parallelschwingenden Dubletts zu etwa 2 Å.-E., Professor Stark gibt 3,6 Å.-E. an.

Florenz, Physikalisches Institut der K. Hochschule, den 4. Januar 1914.

(Eingegangen 7. Januar 1914.)

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. (4) **4**, 197, 1901.

1) N. Bohr, Phil. Mag. (6) **26**, 1, 1913.

Über ein Modell zur Erklärung der Lichtemission.

Von E. Gehrcke.

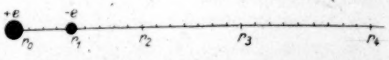
§ 1. Lenard hat schon vor längerer Zeit die Ansicht aufgestellt, daß das Leuchten der Phosphore dadurch zustande kommt, daß aus dem Atom ein Elektron auf größere Weite hin

entfernt würde, welches dann unter Verbrauch der disponiblen, potentiellen Energie Schwingungen um seine alte Gleichgewichtslage vollführt. Diese Ansicht kann man versuchen, auf das Leuchten der Gase zu übertragen: Das Leuchten eines Wasserstoffatoms z. B. soll darin bestehen, daß ein Elektron in seine Gleichgewichtslage zurückkehrt und dabei Pendelungen um diese ausführt. Eine solche Vorstellung wird aber nur dann von Nutzen sein, wenn sie imstande ist, auch die Serienformeln wiederzugeben. Herrn Bohr[1]) ist kürzlich eine formelle Ableitung der Serienformeln gelungen. Welches im einzelnen die notwendigen physikalischen Voraussetzungen sind, die zu diesen Formeln hinführen, dürfte bisher noch nicht feststehen. Ich versuche hier auf einfacherem Wege als Bohr zum Ziel zu kommen. Dabei mache ich folgende allgemeine Voraussetzung: Wenn ein Elektron durch irgendeine Ursache kinetische Energie $\frac{m}{2} v^2$ relativ zum Atomkern besitzt, und wenn diese Energie zur Erzeugung von ν Schwingungen pro Sekunde verbraucht wird, so soll immer $\frac{m}{2} v^2 = h\nu$ sein. Diese Beziehung ist ansprechend durch die Versuche an den sekundären Elektronenstrahlen von ultraviolettem Licht, Röntgen- und γ-Strahlen einigermaßen sichergestellt; ob sie notwendig einen Widerspruch gegen die klassische Mechanik und Elektrodynamik darstellt, ist eine Frage, die hier nicht näher erörtert zu werden braucht[2]).

Ferner nehme ich an, daß das Elektron in einem gewissen Abstand r_1 vom positiven Kern seine stabile Lage hat, in die es nach erfolgter Elongation wieder hinstrebt. Hierin steckt die Annahme einer besonderen Kraft, die das Elektron verhindert, dem positiven Kern unbegrenzt nahe zu kommen. Ich vermag an sich keine Schwierigkeit darin zu erblicken, eine solche Kraft anzunehmen, da die Kräfte der Materie wohl kaum lediglich elektromagnetisch erklärbar sein dürften. Nun soll aber die Rückkehr des Elektrons in die Lage r_1 nicht aus jeder beliebigen Entfernung erfolgen können, sondern nur aus bestimmten Entfernungen r_2, r_3, $r_4 \cdots$. Die Entfernungen r_1, r_2, $r_3 \cdots$ sollen Vielfache eines gewissen, kleinen Abstandes r_0 sein, derart, daß

$$r_p = p^2 r_0, \qquad (1)$$

wo p eine ganze Zahl ist. Dann sei z. B., um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, $r_1 = 4r_0$, $r_2 = 9r_0 \cdots$, wie in nachstehender Figur angenommen; das Elektron der Ladung



$-e$ kann dann also, wenn es aus seiner gewöhnlichen Lage, die in der Entfernung r_1 liegt, verschoben wurde, von r_2 oder r_3 oder r_4 usw. nach r_1 zurückkehren, nicht aber aus den Zwischenlagen. Es wird beim Rückgang in die Entfernung r_1 kinetische Energie aus dem Verlust an potentieller gewinnen; diese wird beim Auftreffen in r_1 in Schwingungsenergie verwandelt. $+e$ sei die Ladung des positiven Atomkerns.

Nun werde die Schwingungsfrequenz unter diesen Voraussetzungen berechnet. Wenn das Elektron aus der beliebigen Entfernung r_p in die Lage r_1 zurückkommt, so hat es den Energiebetrag:

$$T = \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_p}$$

in Form von kinetischer Energie gewonnen. Wir setzen dann allgemein gemäß Gleichung (1):

$$r_1 = q^2 r_0, \qquad (1a)$$

wo q eine ganze Zahl $< p$, so daß

$$T = \frac{e^2}{r_0}\left[\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right]. \qquad (2)$$

Dieser Energiebetrag T steht zur Erzeugung von Schwingungen im Abstand r_1 zur Verfügung und wird nun auf Grund der Fundamentalannahme auf S. 124 links:

$$T = h\nu. \qquad (3)$$

Dies gibt zusammen mit (2)

$$\nu = \frac{e^2}{h r_0}\left[\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right]. \qquad (4)$$

Man fragt jetzt: was ist r_0? — Ein Elektron, welches nach r_0 käme — dies mag nur unter besonderen Umständen geschehen — würde dort eine kinetische Energie vom Betrage

$$T_0 = \frac{e^2}{r_0} = \frac{m}{2} v_0^2 \qquad (5)$$

haben, falls es auf seinem Wege noch keine Energie verloren hat, und falls in unendlicher Entfernung die kinetische Energie $= 0$ ist. Wenn ein in dieser Entfernung r_0 ankommendes Elektron den positiven Kern mit seiner ganzen Geschwindigkeit umkreisen würde, so wäre

1) N. Bohr, Phil. Mag. **26**, 1, 1913.

2) Ein Modell von dieser Beziehung läßt sich vielleicht durch Analogie mit den ponderomotorischen Kräften gewinnen, welche ein Wechselstrommagnet auf einen Metallring ausübt (Versuche von E. Thomson); auch hier ist die abstoßende Wirkung um so größer, je größer die Frequenz; vgl. ferner Swann, Phil. Mag. **25**, 534. 1913.

$$v_0 = 2\pi r_0 \cdot \nu_0, \qquad (6)$$

wo ν_0 die Schwingungszahl des Umlaufs ist. Wenn andererseits wie früher

$$\frac{m}{2} v_0^2 = h \cdot \nu_0, \qquad (7)$$

so folgt aus (5) und (7)

$$\frac{e^2}{r_0} = h\nu_0.$$

Somit kann man Gleichung (4) auch schreiben:

$$\nu = \nu_0 \cdot \left[\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right]. \qquad (8)$$

Man erkennt, daß ν_0 eine Grundfrequenz des Atoms ist, die unter Umständen realisiert werden mag, wenn ein Elektron der Geschwindigkeit v_0 tangential an einem positiven Kern im Abstand r_0 vorbeifliegt; in diesem Falle würde es vom positiven Kern festgehalten werden können, den es mit der Schwingungszahl ν_0 umkreist. Es ist für unsere Betrachtungen ohne Bedeutung, ob bei diesem Vorgang Strahlung ausgesandt wird oder nicht. Man kann im Anschluß an Bohr auch annehmen, daß trotz der Rotation des Elektrons keine Strahlung emittiert wird. Diese Annahme macht keine Schwierigkeit, wenn man sich vorstellt, daß im Abstand r_0 vom positiven Kern kein Äther vorhanden ist, daß also hier eine Zone ätherlosen Vakuums liegt; dann wird, da die Maxwellschen Gleichungen naturgemäß auf den Äther Bezug haben, Rotation des Elektrons möglich sein, und doch keine Strahlungsenergie auf das Äthermedium übertragen werden. Diese Vorstellung eines Äthervakuums, welches ein materielles Atom charakterisiert, erscheint mir physikalisch eher zulässig, wie die umgekehrte Vorstellung, nach welcher der die Materie umgebende Raum leer sein soll.

Ferner folgt aus (5), (6) und (7):

$$r_0 = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}, \qquad (9)$$

$$r_0 = \frac{h^2}{2\pi^2 m e^2}, \qquad (10)$$

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}\left[\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right]. \qquad (11)$$

Letztere Formel (11) gibt in Übereinstimmung mit Bohr die Balmersche Serie. Für r_0 findet man den Wert $1{,}1 \cdot 10^{-8}$ cm, also ungefähr die Hälfte eines Wasserstoffmoleküldurchmessers. Die Grundentfernung r_0, auf welche hier alles zurückgeführt ist, kann daher als Durchmesser eines H-Atoms interpretiert werden.

Physikalisch sagt Gleichung (11) aus:

Wenn man ein H-Atom hat, das so beschaffen ist, daß ein bei r_p befindliches Elektron nach r_1 zurückkehrt ($q = 2$), so sendet es diejenige Spektrallinie aus, deren Schwingungszahl Gleichung (11) angibt, also eine der Linien H_α, H_β, $H_\gamma \cdots$. Wenn dagegen ein H-Atom so beschaffen ist, daß r_2 die Endlage eines von r_p kommenden Elektrons ist ($q = 3$), so sendet es eine Spektrallinie der Paschenschen ultraroten Serie aus, die ebenfalls Gleichung (11) angibt.

Die Serienlinien kommen also in diesem Modell dadurch zustande, daß ein Elektron aus einem Atom in gewisse, ausgezeichnete, ganzzahlige Vielfache des Atomdurchmessers entfernt worden ist und von da in seine ursprüngliche Lage zurückfällt. Ein in mancher Beziehung analoges Bild dieses Vorganges ist ein auf verschiedene Stufen einer Leiter gehobener und von dort frei herabfallender Ball: der Ball wird am Boden verschieden schnelle Auf- und Abbewegungen ausführen, wenn man ihn aus verschiedenen Höhen herabfallen läßt.

Es ist klar, daß auf obiger Grundlage auch komplizierter gebaute Modelle für andere Elemente als Wasserstoffatome angegeben werden können.

§ 2. Ferner kann man, wie dies in analoger Weise bereits Warburg[1]) für die Bohrsche Theorie getan hat, den Einfluß eines elektrischen Feldes auf die Schwingungen in obigem Atommodell unter bestimmten Voraussetzungen angeben.

Es werde ein äußeres elektrisches Feld der Stärke F vorausgesetzt, in dem sich ein parallel F bewegtes Atom, entsprechend der Versuchsanordnung von Stark[2]), befinden möge. Dann ist die einfachste physikalische Annahme, die man machen kann, die, daß die Strecke r_p stets parallel F ist. Diese Annahme würde besagen, daß die Bewegung im Äther (oder das äußere Feld?) die Dipole: positiver Kern – Elektron richtet, so daß sich die Elektronen entweder diesem Felde entgegen oder mit ihm nach ihrer Ruhelage (im Abstand r_1 der obigen Figur) zurückbewegen. Nunmehr ist

$$T = \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_p} \mp eF \cdot (r_p - r_1).$$

Setzt man wieder $T = h\nu'$, wo ν' die durch das elektrische Feld veränderte Frequenz bedeutet, so folgt:

$$\delta\nu = \nu' - \nu = \mp \frac{eF}{h}(r_p - r_1).$$

1) E. Warburg, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 1259, 1913.

2) J. Stark, Berl. Ber. 1913, S. 937. Die hier angegebene Schwingung des Lichts bezieht sich vielleicht auf die Polarisationsebene, vielleicht aber auf den elektrischen Vektor?

Aus Gleichung (1) und (1a) folgt hieraus

$$\delta\nu = +\frac{e r_0}{h}(p^2 - q^2)\cdot F. \qquad (12)$$

Dies ist die Warburgsche Formel, bis auf den numerischen Faktor $\frac{p^2 - q^2}{p^2}\cdot 2$, der, zu Warburgs Formel hinzugefügt, (12) ergibt.

Die betreffende Spektrallinie wird hier durch das Feld nach Rot und nach Violett verschoben. Der Betrag der Verschiebung stimmt der Größenordnung nach mit dem von Warburg berechneten überein. Die verschobenen Linien müssen, da die Schwingungen vermutlich parallel F erfolgen, geradlinig polarisiert sein, die Polarisationsebene senkrecht zum Felde F. Dies ist nach der neuesten Entdeckung von Stark[1]) offenbar der Fall für die am stärksten verschobenen Linien in elektrisch beeinflußten Kanalstrahlen. Für die anderen Linien wird man versuchen, die gemachte Annahme über den Rückkehrweg des Elektrons zu modifizieren. Man könnte etwa annehmen, daß nur unter ganz bestimmten Winkeln gegen die Bewegungsrichtung des (Kanalstrahlen-)Atoms ein Zurückfallen des Elektrons aus den Entfernungen r_p stattfindet. Dann würde sich eine Aufsplitterung in mehrere Komponenten ergeben; die Polarisationen derselben würden die Schwingungsrichtungen auf dem Atom bestimmen lassen. — Wenn diese Annahmen zutreffen, so sollte in Richtung der Bewegung kein mit Polarisationen verbundener, elektrischer Feldeinfluß vorhanden sein, sofern die Elektronen nur längs oder unter bestimmten Winkeln zum Felde F in ihre Gleichgewichtslage zurückfallen können; denn dann werden die ersteren in der Richtung von F gar nicht, die zweiten aber ohne bevorzugte Polarisationsrichtung strahlen. Auch diese Folgerungen sind augenscheinlich im Einklang mit der Erfahrung.

Wenn leuchtende Teilchen keine gemeinsame Geschwindigkeitskomponente von bestimmter Richtung haben, so sollte keine Polarisation und keine Aufspaltung, sondern eine Verbreiterung der Linien eintreten. Dies ist beobachtet worden bei den durch elektrische Schwingungen erregten Linien in der positiven Lichtsäule.

Für den Zeemaneffekt führt dieses Atommodell auf die Lorentzsche Theorie, im Gegensatz zu der Theorie von Bohr (vgl. Warburg, l.c.).

§ 3. Im Anschluß an das Vorstehende läßt sich auch darlegen, wie die Wärmestrahlung (Temperaturstrahlung) in einem Gase erfolgen kann. Zu diesem Zwecke möge ein Schwarm von Atommodellen wie das obige betrachtet werden. Wir setzen dann voraus, daß jedes Atom sein Elektron in relativer Ruhe in einem gewissen Abstand (vgl. oben) hält, wenn es nicht strahlt; sobald aber das Atom eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung erfährt, soll Strahlung emittiert werden, indem dann das Elektron Schwingungen gegen den Atomkern vollführt. Stößt z. B. ein Atom der Geschwindigkeit v auf eine vollkommen elastische Wand, und zwar in senkrechter Richtung, das Elektron hinter sich herziehend, so wird die Geschwindigkeit des Elektrons relativ zum positiven Atomkern vor dem Stoß $= 0$, nach dem Stoß $= 2v$ sein, es wird daher, wie oben, Schwingungsenergie

$$\frac{m}{2}(2v)^2 = h\nu \qquad (13)$$

die Folge des Stoßes sein; hier ist m die Masse des Elektrons. Um die Betrachtungen zu vereinfachen, sei folgendes Beispiel ins Auge gefaßt: Eine große Anzahl von Gasatomen sei in einer Kugel vom Radius 1 cm im Temperaturgleichgewicht befindlich. Dann möge plötzlich der Radius der die Atome umschließenden Kugel sehr groß gemacht werden[1]). Hierdurch wird, wenn die Kugelwände vollkommen elastisch und glatt sind, bewirkt, daß alle Atome nur senkrechte Stöße gegen die Wand vollführen, und daß die Erzeugung der gesamten Wärmestrahlung dauernd nur durch Stöße gegen die Wand ausgelöst wird; die gegenseitigen Stöße der Atome untereinander sind jetzt so selten, daß wir von ihnen absehen dürfen; die Geschwindigkeitsverteilung in dem Gase ist dieselbe wie vorher. Wenn die Zahl derjenigen Atome, welche die Kugeloberfläche in der Zeiteinheit unter Erzeugung von Schwingungsenergie treffen, und deren Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ liegen, mit dN bezeichnet wird, so wird die Strahlung dE_v dieser Atome pro Zeiteinheit unter Berücksichtigung von (13):

$$dE_v = h\nu \cdot dN.$$

Nun ist dN nicht etwa gleich der Zahl der Atome, deren Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ liegen, sondern kleiner, aus dem Grunde, weil nicht alle Atome in der Zeit 1 die Wand der Kugel treffen können; die schnellen Atome werden die Wand öfter treffen als die langsamen. Daher ist die Anzahl dN der in der Zeit 1 strahlenden Atome von der Geschwindigkeit v zu setzen:

$$dN \sim v \cdot dN_v,$$

1) Vgl. vorige Seite, Anm. 2.

1) Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß die (evakuierte) Kugel vom großen Radius schon vorher da war, und daß die kleine in ihrem Mittelpunkt befindliche Kugel plötzlich platzt.

wo dN_v die Anzahl sämtlicher Atome der Geschwindigkeit v, auch der nichtstrahlenden, bedeutet. Somit folgt:

$$dE_\nu \sim h\nu \cdot v\, dN_v. \qquad (14)$$

Die Größe dN_v ist, wie ich früher auseinandersetzte[1]), schwerlich die Maxwellsche ($\sim v^2 \cdot e^{-\frac{v^2}{\beta^2}} \cdot dv$), weil diese die Strahlung vernachlässigt; nur für Moleküle eines Gases, welches trotz seiner Temperatur nicht strahlt, sollte die Maxwellsche Verteilung der Geschwindigkeiten exakt gelten. Ich habe versuchsweise eine Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Form:

$$dN_v \sim \frac{v^4 \cdot dv}{e^{\alpha v^2} - 1} \qquad (15)$$

vorgeschlagen, welche dem Einfluß der Strahlung Rechnung zu tragen sucht[2]). Aus dieser Funktion kann man an Hand thermodynamischer Betrachtungen die richtige Spektralgleichung ohne die Annahme von Energiequanten gewinnen, worauf ich früher hinwies. Nun sei wieder die Gleichung (15) als gültig vorausgesetzt; dann folgt aus (14)

$$dE_\nu \sim \frac{h\nu \cdot v^5 dv}{e^{\alpha v^2} - 1}.$$

Berücksichtigt man nunmehr die Grundgleichung (13), so folgt:

$$\frac{dE_\nu}{d\nu} \sim \frac{\nu^3}{e^{\text{const.}\,\nu} - 1}. \qquad (16)$$

Dies ist die richtige, d. h. experimentell bestätigte Abhängigkeit der Strahlungsenergie eines im Temperaturgleichgewicht befindlichen Hohlraumes von der Frequenz ν.

Man sieht hieraus, daß das obige Atommodell dazu dienen kann, sich von den verschiedensten Vorgängen ein anschauliches Bild zu machen, sofern die Gleichung $\frac{m}{2} v^2 = h\nu$ als gültig vorausgesetzt wird. In der inneren Widerspruchslosigkeit dieses Modells wird man einen Vorzug, aber natürlich keine Garantie für die Richtigkeit hinsichtlich seiner Anwendung auf Molekularvorgänge erblicken dürfen.

1) E. Gehrcke, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 669, 1913.
2) Die Abhängigkeit der Größe dN_v von der Temperatur läßt sich mathematisch schwieriger formulieren, da die mechanische Definition der Temperatur $\vartheta \sim \overline{v^2}$ nicht streng, sondern wegen der Strahlung nur angenähert gelten kann.

(Eingegangen 9. Dezember 1913.)

Raumgitterschwingungen und spezifische Wärmen mehratomiger fester Körper. I.

Von Hans Thirring.

Die Quantentheorie hat in den Arbeiten von P. Debye[1]) und Born und v. Kármán[2]) Beziehungen zwischen den spezifischen Wärmen fester Substanzen und den elastischen Konstanten geliefert, die, soweit sich bisher überblicken läßt, mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung stehen. Leider ist das experimentelle Material, das die Berechnungen verifizieren könnte, noch recht mangelhaft; speziell für die Born- und Kármánsche Theorie, die ja eigentlich nur für einatomige reguläre Kristalle gilt, liegen gleichzeitig Beobachtungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen und die Elastizitätskonstanten nur für das Kupfer vor — und auch da sind die Messungen noch nicht als zuverlässig zu betrachten[3]). Dabei wäre eine möglichst genaue quantitative Prüfung gerade der Born- und Kármánschen Theorie sehr interessant, einerseits wegen ihres Zusammenhangs mit der Quantenhypothese, und andererseits, weil sie aus der Theorie der Raumgitterschwingungen hervorgeht, also auf einer Vorstellung beruht, die seit der Laueschen Entdeckung der Röntgeninterferenzen die sicherste Basis für die Molekulartheorie fester Körper zu werden verspricht.

Ich habe also, um möglichst viele Substanzen zur Prüfung der Born- und Kármánschen Theorie heranziehen zu können, in einer vor kurzem erschienenen Arbeit[4]), in welcher ich die von diesen beiden Autoren angegebenen Formeln bis zu den numerischen Werten durchrechnete, außer für Cu auch noch für $NaCl$ und KCl Werte der spezifischen Wärmen bei tiefen Temperaturen angegeben, obwohl die genannte Theorie nur für einatomige Substanzen Gültigkeit beansprucht. Bei diesen Rechnungen habe ich die Raumgitterpunkte mit Molekülen $NaCl$ und KCl besetzt, statt mit einzelnen Atomen, wie es sich aus den Röntgeninterferenzen und auch schon aus der elementaren Theorie des Dulong-Petitschen Gesetzes ergibt. Außerdem waren die zur Berechnung verwendeten Werte gewisser Konstanten, z. B. der Boltzmannschen Konstante k nicht ganz einwandfrei, so zwar, daß die hieraus resultierenden Fehler den durch die oben erwähnte Annahme gemachten größtenteils kompensierten, immerhin kann man aber die l. c. angegebenen

1) P. Debye, Ann. d. Phys. **39**, 789, 1912.
2) Born und v. Kármán, diese Zeitschr. **13**, 297, 1912; **14**, 15, 65, 1913.
3) W. Voigt, Berl. Ber. 1884, S. 16.
4) H. Thirring, diese Zeitschr. **14**, 867, 1913.

Werte der spezifischen Wärmen nur als ganz grobe Annäherungen betrachten.

Ich will nun, statt erst die Rechnung mit den richtigen Werten zu wiederholen, im folgenden zeigen, wie man die Born- und v. Kármánsche Theorie der spezifischen Wärmen auf mehratomige Substanzen übertragen kann. Es erfordert dies nur eine rechnerische Umformung gewisser Gleichungen, da ja die Fundamentalformel [Gl. (50), S. 308, l. c.] für mehratomige Körper auch noch gilt. Dadurch ergibt sich dann die Möglichkeit der Prüfung an vier weiteren Substanzen, nämlich $NaCl$, KCl, CaF_2 und FeS_2, wobei sich herausstellen wird, daß bei Berücksichtigung der Änderung der Elastizitätskonstanten mit der Temperatur die Übereinstimmung der gerechneten mit den beobachteten Werten so gut wird wie bei der Nernst-Lindemannschen und der Debyeschen Formel. Dabei ist zu betonen, daß bei sämtlichen gerechneten Substanzen die Resultate völlig eindeutig aus den vorhandenen Daten folgen. In der Nernst-Lindemannschen Formel steckt hingegen noch ein willkürlicher Parameter ν, der so gewählt wird, daß die berechneten Kurven sich an die beobachteten möglichst gut anschließen, wobei allerdings für $NaCl$, KCl und KBr der betreffende ν-Wert mit der Reststrahlenfrequenz übereinstimmt.

§ 1. Die Schwingungen des zweiatomigen Raumgitters.

Born und v. Kármán gehen bekanntlich von den Differentialgleichungen der Schwingungen ihres Raumgitters aus, deren Integrale die Form haben:

$$u_{l,m,n} = u e^{i(2\pi\nu t + l\varphi + m\psi + n\chi)}, \qquad (1)$$

wobei die Schwingungszahl ν mit Wellenlänge und Fortpflanzungsrichtung der Schwingung, die durch die Größen φ, ψ, χ gegeben sind, verknüpft ist durch die Dispersionsgleichung

$$\Delta(\varphi, \psi, \chi, \nu) = 0, \qquad (2)$$

die in Form der dreigliedrigen Determinante, Gleichung (16), l. c., auftritt. Die Frage nach der Verteilung der Eigenschwingungen über das akustische Spektrum beantworten nun Born und v. Kármán mit dem Satze:

In gleiche Phasenbezirke $\Delta\varphi\,\Delta\psi\,\Delta\chi$ fällt die gleiche Zahl von Eigenfrequenzen.

Wenn man dann jeder einzelnen Schwingung den Planckschen Wert der mittleren Energie zuerteilt, folgt für die Gesamtenergie der Ausdruck

$$E = N_g \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{k=1}^{3} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\nu_k)\, d\varphi\, d\psi\, d\chi \qquad (3)$$

mit

$$f(\nu) = \frac{\frac{R}{N}\beta'\nu}{e^{\frac{\beta'\nu}{T}} - 1}. \qquad (4)$$

Dabei ist N_g die Zahl der Gitterpunkte und ν_1, ν_2, ν_3 sind die drei Wurzeln von (2), also Funktionen von φ, ψ, χ. Das Integral (3) läßt sich natürlich in geschlossener Form nicht auswerten, wohl aber läßt sich, wie ich a. a. O. zeigte, $\frac{dE}{dT} = c_v$ durch Reihenentwicklung als Funktion der in (2) vorkommenden Größen, nämlich der Gitterkonstanten, der Atommasse und der Elastizitätskonstanten berechnen. Man erhält so für die spezifische Wärme pro Grammatom den Ausdruck:

$$c_v = 3R\left\{1 - \frac{B_2}{2!} I_1\left(\frac{\beta'}{T}\right)^2 + \right. \\ \left. + 3\frac{B_4}{4!} I_2\left(\frac{\beta'}{T}\right)^4 - 5\frac{B_6}{6!} I_3\left(\frac{\beta'}{T}\right)^6 + \cdots\right\}, \qquad (5)$$

wobei R die Gaskonstante, $\beta' = \frac{h}{k}$ der Quotient der beiden Strahlungskonstanten ist, die B_i die Bernoullischen Zahlen sind und die I_k durch die Gleichung definiert werden:

$$I_k = \frac{1}{3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} s_k\, d\varphi\, d\psi\, d\chi. \qquad (6)$$

Darin ist wieder $s_k = \nu_1^{2k} + \nu_2^{2k} + \nu_3^{2k}$ die Potenzsumme der drei Wurzeln der Dispersionsgleichung (2). Die s_k lassen sich bekanntlich rational durch die symmetrischen Grundfunktionen, i. e. die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ν^2 in (2) ausdrücken, und sind, wie sich herausstellt, Funktionen von φ, ψ, χ, die sich integrieren lassen.

Man erkennt also aus (5) und (6), daß es bei der Berechnung der spezifischen Wärme von Kristallen im wesentlichen auf die s_k, d. h. auf die Bestimmung der eben erwähnten Koeffizienten in (2) ankommt. Es läßt sich also lediglich durch Aufstellung der betreffenden Dispersionsgleichung die Theorie auf jedes Raumgitter übertragen, für das der Ansatz (3), oder was damit gleichbedeutend ist, der Born- und v. Kármánsche Satz von der Verteilung der Eigenfrequenzen gilt. Dies ist nun, wie aus einer soeben erschienenen Arbeit von D. A. Goldhammer[1]) hervorgeht, ganz allgemein für beliebige Kristalle der Fall.

Wir wollen im folgenden die Rechnung

1) D. A. Goldhammer, diese Zeitschr. **14**, 1185, 1913.

durchführen für ein kubisches Gitter, das mit zweierlei verschiedenen Massenpunkten besetzt ist, das also der Struktur der regulär kristallisierenden Haloidsalze $NaCl$ und KCl entspricht. Die naheliegendste Vorstellung, die man sich über die Lagerung der Atome für reguläre zweiatomige Substanzen machen kann, ist die in Fig. 1 dargestellte.

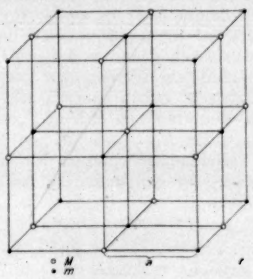


Fig. 1.

Daß diese Vorstellung für $NaCl$ und KCl tatsächlich auch zutrifft, scheint durch die Untersuchungen von W. L. Bragg[1]) über die Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallflächen ziemlich sicher gestellt zu sein.

Die Koordinaten der einzelnen Gitterpunkte sind bei geeigneter Wahl der Achsen:

$$\left.\begin{aligned} x_{l,m,n} &= la, \\ y_{l,m,n} &= ma, \\ z_{l,m,n} &= na. \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

Dabei ist ein Gitterpunkt (l, m, n) mit einem Atom von der Masse M besetzt, wenn $l+m+n$ eine gerade Zahl ist, und mit einem Atom m, wenn $l+m+n$ eine ungerade Zahl ist. Bei einer Deformation des Gitters denken wir uns ganz konform mit Born und v. Kármán zwischen je zwei Gitterpunkten quasielastische Kräfte wirksam, die Null sind für die der Ruhelage entsprechenden Entfernungen, bei Vergrößerung dieser Distanz anziehend und bei Verkleinerung abstoßend wirken. Diese Kräfte sind natürlich für unmittelbar benachbarte Atome am stärksten und nehmen für entfernter liegende Punkte sehr rasch ab, so daß Born und v. Kármán bei ihrem Ansatz nur die Einwirkung der 18 nächsten Nachbarn eines Atoms in Rechnung ziehen, und auch da noch bei den Punkten in der Entfernung $a\sqrt{2}$ die durch Verschiebung senkrecht zur Verbindungslinie entstehenden Kräfte unberücksichtigt lassen[2]). Diese Vernachlässigung muß eingeführt werden, einerseits, weil sonst die rechnerischen Schwierigkeiten zu groß würden, andererseits, weil sich sonst der von Born und v. Kármán mit glücklichem Griff eingeführte Zusammenhang zwischen den sonst unbekannten quasielastischen Kräften und den Elastizitätskonstanten nicht herstellen ließe. Da man sich über die Größe der dadurch herbeigeführten Ungenauigkeit von vornherein keine Rechenschaft geben kann, mag diese Vernachlässigung vielleicht als der schwächste Punkt der Theorie betrachtet werden, und irgendwelche Diskrepanzen mit der Erfahrung wird man wohl auf Rechnung dieser Ungenauigkeit schieben müssen. Da nun aber, wie sich später herausstellen wird, die Übereinstimmung mit der Erfahrung eine sehr gute ist, wird man den vereinfachten Ansatz a posteriori wohl als gerechtfertigt betrachten können.

Bezeichnen wir dann die Verschiebungen parallel den Achsen eines Punktes M mit U, V, W, und eines Punktes m mit u, v, w, so geht der Bornsche Ansatz für die auf ein Atom wirkende Kraft [a. a. O., Gl. 10)] über in:

$$\begin{aligned} X_{l,m,n} = {} & \alpha(u_{l+1,m,n} + u_{l-1,m,n} - 2U_{l,m,n}) + \\ & + \beta(u_{l,m+1,n} + u_{l,m-1,n} + u_{l,m,n+1} + \\ & \quad + u_{l,m,n-1} - 4U_{l,m,n}) + \\ & + \gamma(U_{l+1,m,n+1} + U_{l+1,m+1,n} + \\ & \quad + U_{l+1,m,n-1} + U_{l+1,m-1,n} - \\ & \quad - 4U_{l,m,n} + U_{l-1,m,n-1} + \\ & \quad + U_{l-1,m+1,n} + U_{l-1,m,n-1} + \\ & \quad + U_{l-1,m-1,n} - 4U_{l,m,n} + \\ & \quad + V_{l+1,m+1,n} + V_{l-1,m-1,n} - \\ & \quad - V_{l+1,m-1,n} - V_{l-1,m+1,n} + \\ & \quad + W_{l+1,m,n+1} + W_{l-1,m,n-1} - \\ & \quad - W_{l+1,m,n-1} - W_{l-1,m,n+1}) \qquad (8) \end{aligned}$$

mit zwei analogen Gleichungen für $Y_{l,m,n}$ und $Z_{l,m,n}$. Ferner:

$$\begin{aligned} X_{(l,m,n)} = {} & \alpha(U_{l+1,m,n} + U_{l-1,m,n} - 2U_{l,m,n}) + \\ & + \beta(U_{l,m+1,n} + U_{l,m-1,n} + U_{l,m,n+1} + \\ & \quad + U_{l,m,n-1} - 4u_{l,m,n}) + \\ & + \gamma'(u_{l+1,m,n+1} + u_{l+1,m+1,n} + \\ & \quad + u_{l+1,m,n-1} + u_{l+1,m-1,n} - \\ & \quad - 4u_{l,m,n} + u_{l-1,m,n+1} + \\ & \quad + u_{l-1,m+1,n} + u_{l-1,m,n-1} + \\ & \quad + u_{l-1,m-1,n} - 4u_{l,m,n} + \\ & \quad + v_{l+1,m+1,n} + v_{l-1,m-1,n} - \\ & \quad - v_{l+1,m-1,n} - v_{l-1,m+1,n} + \\ & \quad + w_{l+1,m,n+1} + w_{l-1,m,n-1} - \\ & \quad - v_{l+1,m,n-1} - v_{l-1,m,n+1}) \qquad (8') \end{aligned}$$

mit zwei analogen Gleichungen.

Dabei bedeutet $X_{l,m,n}$ mit $l+m+n =$ einer geraden Zahl die Kraft in der x-Richtung auf ein Atom M, und $X_{(l,m,n)}$ mit $l+m+n =$ einer ungeraden Zahl die Kraft auf ein Atom m. α und β beziehen sich in beiden Gleichungstripeln auf die quasielastischen Kräfte, die zwi-

1) W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. London **89**, 265, 1913.

2) a. a. O., S. 300, 1912.

schen einem großen und einem kleinen Atom wirksam sind, γ hingegen auf die Wirkung zwischen zwei Atomen M im Abstand $a\sqrt{2}$ und γ' auf die Wirkung zwischen zwei Atomen m im gleichen Abstand. Man wird also diese beiden Größen von vornherein als verschieden betrachten müssen.

In Analogie mit den Gleichungen (13)[1] Born und v. Kármáns wird man ferner schließen müssen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a(C_{11} - C_{12} - C_{44}),\\ 2\beta &= a(C_{44} - C_{12}),\\ 2(\gamma+\gamma') &= a(C_{44} + C_{12}). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Diese Gleichungen gestatten nur die Berechnung der Summe $\gamma+\gamma'$ aus den elastischen Konstanten, während in den folgenden Formeln γ und γ' getrennt vorkommen. Man ist also, um weiter rechnen zu können, gezwungen, irgendwelche (jedenfalls ziemlich vage) Vermutungen über das Verhältnis $\gamma:\gamma'$ anzustellen, das man etwa, wenn es sich um Gravitations- oder elektrische Kräfte handelte, gleich dem Verhältnis der Massen- bzw. Ladungsquadrate zu setzen hätte. Da dies nun keineswegs der Fall ist, habe ich es bei unserer völligen Unkenntnis der intermolekularen Kräfte für besser gehalten, für die Ausrechnung $\gamma = \gamma'$ zu setzen, weil man ja auch im allgemeinen durchaus nicht konstatieren kann, daß bei Körpern mit schweren Atomen die Teilchen fester aneinander gebunden sind, als bei den anderen. Gerade die sehr harten Körper, wie Diamant, Quarz u. a. enthalten verhältnismäßig sehr leichte Atome. Immerhin muß zugegeben werden, daß diese Notwendigkeit, das Verhältnis $\gamma:\gamma'$ willkürlich festzusetzen, noch als eine Lücke der Theorie zu betrachten ist, die jedoch darum nicht zu schwer ins Gewicht fällt, weil selbst für beliebige Werte dieses Verhältnisses zwischen 0 und ∞ das Schlußresultat für die spezifischen Wärmen nur zwischen gewissen nicht sehr weiten Grenzen schwankt.

Durch Einsetzen von $M\ddot{U}_{l,m,n}$ für $X_{l,m,n}$ und $m\ddot{u}_{l,m,n}$ für $X_{(l,m,n)}$ in (8) und (8′) erhält man die Differentialgleichungen für die Gitterschwingungen, die sich durch die Ansätze integrieren lassen:

$$\left.\begin{aligned} U_{l,m,n} &= Ue^{i(2\pi\nu t + l\varphi + m\psi + n\chi)},\\ u_{l,m,n} &= ue^{i(2\pi\nu t + l\varphi + m\psi + n\chi)}, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

mit vier analogen Gleichungen.

Durch Einsetzen in die (8) und (8′) entsprechenden Differentialgleichungen erhält man ein System von sechs homogenen linearen Gleichungen für U, V, W und u, v, w, deren Säkulargleichung lautet:

$$\begin{vmatrix} A_1 - 2\pi^2 M\nu^2 & B_3 & B_2 & C_1 & 0 & 0\\ B_3 & A_2 - 2\pi^2 M\nu^2 & B_1 & 0 & C_2 & 0\\ B_2 & B_1 & A_3 - 2\pi^2 M\nu^2 & 0 & 0 & C_3\\ C_1 & 0 & 0 & A_1' - 2\pi^2 m\nu^2 & B_3' & B_2'\\ 0 & C_2 & 0 & B_3' & A_2' - 2\pi^2 m\nu^2 & B_1'\\ 0 & 0 & C_3 & B_2' & B_1' & A_3' - 2\pi^2 m\nu^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Darin bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha + 2\beta + 2\gamma\,(2 - \cos\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\chi),\\ A_1' &= \alpha + 2\beta + 2\gamma'(2 - \cos\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\chi),\\ B_1 &= 2\gamma\sin\psi\sin\chi,\\ B_1' &= 2\gamma'\sin\psi\sin\psi,\\ C_1 &= -\alpha\cos\varphi - \beta(\cos\psi + \cos\chi) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

mit A_2, A_3 usw. durch zyklische Vertauschung der φ, ψ, χ. Wir wollen von hier an die oben erörterte Annahme $\gamma = \gamma'$ machen, so daß wir im weiteren Verlauf der Rechnung die Striche bei den A und B weglassen können.

Gleichung (11) ist die Dispersionsgleichung für das zweiatomige Raumgitter und liefert zu jedem Wertetripel φ, ψ, χ, das eine bestimmte Wellenlänge und Fortpflanzungsrichtung angibt, sechs im allgemeinen verschiedene Schwingungszahlen ν. Born und v. Kármán haben seinerzeit die analoge Gleichung für das eindimensionale Modell einer zweiatomigen Punktreihe aufgestellt und daran gewisse Vermutungen über das Spektrum des dreidimensionalen Gitters geknüpft[1]), die sich zum Teil bestätigen, so daß eine etwas eingehendere Diskussion von (11) nicht ohne Interesse sein dürfte.

Wir wollen wieder die von Born und v. Kármán betrachteten Grenzschwingungen bestimmen, die den Werten für φ, ψ, χ entsprechen:

$$\begin{matrix} 000 & \pi 00 & 0\pi 0 & 00\pi\\ 0\pi\pi & \pi 0\pi & \pi\pi 0 & \pi\pi\pi. \end{matrix}$$

Für diese Werte reduziert sich die Gleichung 6. Grades in ν^2 (11) auf quadratische Gleichungen, so daß man sie ohne weiteres auflösen kann. Wegen der Gleichwertigkeit der drei Achsen beim regulären Kristall geben von den acht angegebenen Wertetripeln nur vier verschiedene Schwingungen, nämlich:

$$000 \quad \pi 00 \quad 0\pi\pi \quad \pi\pi\pi.$$

Beim einatomigen Gitter stellt jedes dieser

1) a. a. O., S. 301, 1912.

1) a. a. O., S. 304, 1912.

Tripel eine der folgenden mit I bis IV bezeichneten Schwingungen dar:

I. (000) Verschiebung des ganzen Systems ohne Deformation.

II. (π00) Eine Welle in der Richtung einer Achse mit der Wellenlänge $2a$.

III. (0, $\pi\pi$) Eine Welle, normal zu einer Achse, und unter 45^0 gegen die beiden anderen fortschreitend. Wellenlänge $2a\frac{1}{\sqrt{2}}$.

IV. ($\pi\pi\pi$) Eine Welle, die in der Richtung einer Würfeldiagonale fortschreitet, mit der Länge $2a\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Beim zweiatomigen Gitter sind die Beziehungen nicht ganz so einfach, weil die ψ, φ, χ nur dann den Richtungskosinus der Wellennormale proportional sind, wenn alle Größen U, V, W und u, v, w vom selben Vorzeichen sind, was, wie sich gleich herausstellen wird, nicht für alle Lösungen von (11) der Fall ist. Wir wollen zunächst die Wurzeln von (11) für die oben angegebenen vier Wertetripel bestimmen, für welche wegen (12) die Größen B sämtlich verschwinden, so daß unsere Determinante die Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} A_1-2\pi^2M\nu^2 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2-2\pi^2M\nu^2 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3-2\pi^2M\nu^2 & 0 & 0 & C_3 \\ C_1 & 0 & 0 & A_1-2\pi^2m\nu^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & A_2-2\pi^2m\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & A_3-2\pi^2m\nu^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Durch leichte Umformung erkennt man, daß diese Determinante in das Produkt der drei zweigliedrigen zerfällt:

$$\begin{vmatrix} A_1-2\pi^2M\nu^2 & C_1 \\ C_1 & A_1-2\pi^2m\nu^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2-2\pi^2M\nu^2 & C_2 \\ C_2 & A_2-2\pi^2m\nu^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3-2\pi^2M\nu^2 & C_3 \\ C_3 & A_3-2\pi^2m\nu^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Man sieht ferner aus (12), daß für 000 und $\pi\pi\pi$:

$$A_1=A_2=A_3; \quad C_1=C_2=C_3$$

und für π00 und 0$\pi\pi$:

$$A_1+A_2=A_3; \quad C_1+C_2=C_3$$

wird. Man erhält deswegen für jedes der beiden erstgenannten Wertetripel zwei Lösungen für ν^2 und für jedes der beiden anderen vier Lösungen, und zwar:

für 000:

$$\nu_1=0, \quad \nu_2=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{(M+m)(\alpha+2\beta)}{2mM}},$$

für $\pi\pi\pi$:

ν_1, ν_2 (wie oben),

für π00:

$$\left.\begin{aligned} \nu_3 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{Mm}}\sqrt{(M+m)(\delta+4\gamma) \quad \sqrt{(M+m)^2(\delta+4\gamma)^2+4Mm[(\alpha-2\beta)^2-(\delta+4\gamma)^2]}}, \\ \nu_4 & \\ \nu_5 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{Mm}}\sqrt{(M+m)\delta+\sqrt{(M+m)^2\delta^2+4Mm(\alpha^2-\delta^2)}}, \\ \nu_6 & \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

und für 0$\pi\pi$:

ν_3, ν_4, ν_5, ν_6 (wie oben),

dabei bedeutet:

$$\delta=\alpha+2\beta+4\gamma=a(C_{11}+C_{44}-C_{12})\ ^1). \tag{16}$$

An diesen Lösungen mag im ersten Moment einiges auffällig erscheinen: zunächst daß für 000 eine von Null verschiedene Schwingungszahl auftritt, daß ferner für π00 zwei longitudinale und zwei transversale Wellen vorhanden sind, daß die Lösungen für π00 und für 0$\pi\pi$ zusammenfallen usw. Die Verhältnisse werden aber sofort klar, wenn man die sechs homogenen linearen Gleichungen in U, V, W und u, v, w betrachtet, deren Säkulargleichung (11) ist. Die Lösung $\nu=0$ braucht als trivial wohl nicht besprochen zu werden. Für $\nu=\nu_2$ werden die eben erwähnten Gleichungen, wenn man für die A und B ihre Werte aus (12) einführt und die entsprechenden Kürzungen vornimmt:

$$MU+mu=0,$$

1) Nicht zu verwechseln mit der von Born und v. Kármán eingeführten Größe δ, die sie später gemäß der oben besprochenen Vereinfachung $=0$ setzen.

$$MV + mv = 0,$$
$$MW + mw = 0.$$

U und u, V und v, W und w haben entgegengesetztes Vorzeichen, zwei benachbarte Gitterpunkte schwingen in entgegengesetzter Phase; diese Lösung, kombiniert mit dem Wertetripel $0\,0\,0$ für $\varphi\psi\chi$, stellt also nicht eine Schwingung nach I, sondern nach Kategorie IV dar. Umgekehrt erhält man auch für das Wertetripel $\pi\pi\pi$ und $\nu = 0$ Gleichungen, die bedingen, daß U und u .... verkehrtes Vorzeichen haben, so daß also eine reine Verschiebung nach I resultiert.

Es stellen also die Lösungen

$$\left.\begin{matrix} 0\,0\,0 \\ \pi\pi\pi \end{matrix}\right\} \nu_1$$

und

$$\left.\begin{matrix} 0\,0\,0 \\ \pi\pi\pi \end{matrix}\right\} \nu_2$$

je ein Paar identischer Schwingungen dar. Ebenso läßt sich zeigen, daß die zu denselben ν-Werten gehörigen Lösungen für $\pi\,0\,0$ und $0\,\pi\,\pi$ jedesmal dieselben Schwingungen darstellen, und zwar:

für ν_3 eine longitudinale Schwingung nach II,
„ ν_4 „ transversale „ „ III,
„ ν_5 „ longitudinale „ „ III,
„ ν_6 „ transversale „ „ II.

Man sieht demnach, daß die Anzahl der Grenzschwingungen dieselbe geblieben ist wie beim einatomigen Gitter, nämlich fünf, abgesehen von $\nu = 0$. Für $M = m$ gehen Gleichung (15) über in:

$$\left.\begin{aligned} \nu_2 &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha+2\beta}{m}}, \\ \nu_3 &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha+4\gamma}{m}}, \\ \nu_4 &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\beta+4\gamma}{m}}, \\ \nu_5 &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{m}}, \\ \nu_6 &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\beta+2\gamma}{m}}. \end{aligned}\right| \quad (17)$$

Diese Gleichungen sind natürlich ganz identisch mit den von Born und v. Kármán aufgestellten [l. c., Gl. (20)], wenn man die dort auftretenden Größen δ gemäß der wiederholt erwähnten Annahme $= 0$ setzt (außerdem tritt in den zitierten Gleichungen noch der Faktor 2π auf, weil Born und v. Kármán unter ν die Schwingungszahl in 2π sec verstehen).

Für Substanzen, die aus nicht sehr verschieden schweren Atomen bestehen, wie z. B. KCl, werden demnach auch die numerischen Werte der aus den neuen Formeln (15) gerechneten Grenzschwingungszahlen von den bei Born und v. Kármán angegebenen nur wenig abweichen. Selbst für $NaCl$ (23 : 35,5) sind die durch die zweiatomige Rechnung herbeigeführten Änderungen, wie die folgende Tabelle zeigt, ganz unwesentlich.

Tabelle 1.

Grenzschwingungen für Steinsalz.

	nach (15)	nach (17)	beob.
λ_2	83,4 μ	85,5 μ	
λ_3	54,1	58,7	54 μ
λ_4	82,6	77,8	
λ_5	66,5	67,4	87
λ_6	111	110	

Es sind hier die den einzelnen Grenzschwingungen entsprechenden Reststrahlenwellenlängen angegeben. Die in der dritten Spalte enthaltenen Werte stimmen mit den von Born und v. Kármán in ihrer Tabelle angeführten Zahlen nicht vollkommen überein, obwohl sie aus genau derselben Formel berechnet sind; das kommt daher, daß die der Rechnung zugrundegelegten Materialkonstanten (die weiter unten bei den spezifischen Wärmen ausführlich verzeichnet sind), nicht genau dieselben sind, wie die von den beiden genannten Autoren verwendeten. — Die Übereinstimmung mit den aus den Reststrahlen- und Dispersionsbeobachtungen gewonnenen Werten ist eine gute.

Wie schon angedeutet, haben Born und v. Kármán auf Grund ihres eindimensionalen Modells die Vermutung ausgesprochen, daß sich für Raumgitter vom Typus Fig. 1 zwei getrennte Spektralbereiche ergeben werden, wobei die Grenzschwingungen des einen die ultraroten und jene des anderen die ultravioletten Eigenfrequenzen des festen Körpers liefern würden. Tatsächlich ergeben sich, wie sofort gezeigt werden wird, stark divergierende Werte unter den ν_1 bis ν_6, wenn m gegen M sehr klein ist, das wäre etwa der Fall für ein Gitter, dessen Punkte abwechselnd mit Atomen und Elektronen besetzt ist. Wenn wir uns also diesmal einen einatomigen Kristall, etwa Cu, nach Fig. 1 gebaut vorstellen, so daß die Punkte M Cu-Atome, die Punkte m Elektronen darstellen, dann könnten die Formeln (15) die ultraroten und ultravioletten Eigenfrequenzen des Kupfers liefern. Denn wenn wir $m : M$ gegen 1 vernachlässigen, dann gehen Gleichung (15) über in

$$\left.\begin{aligned}
\nu_2 &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha+2\beta}{2m}},\\
\nu_3 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(\delta+4\gamma)}{m}},\\
\nu_4 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(\delta+4\gamma)^2-(\alpha-2\beta)^2}{M(\delta+4\gamma)}},\\
\nu_5 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\delta}{m}},\\
\nu_6 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\delta^2-\alpha^2}{M\delta}}.
\end{aligned}\right\} \quad (15')$$

Von diesen fünf Frequenzen sind ν_2, ν_3, ν_5 sehr groß, so daß sie einer ultravioletten Schwingung entsprechen, während ν_4 und ν_6 ins Ultrarot fallen. Die numerischen Werte der aus (15′) folgenden Eigenwellenlängen für *Cu* sind:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= 2670\ \text{Å.},\\
\lambda_5 &= 1900\ \text{Å.},\\
\lambda_4 &= 82{,}5\ \mu,\\
\lambda_6 &= 116\ \mu,
\end{aligned}$$

Man sieht also ganz deutlich, wie aus den elastischen Konstanten und den Molekül- und Elektronenmassen ganz eindeutig Grenzschwingungen hervorgehen, von denen ein Paar im Ultrarot und ein Paar im Ultraviolett liegen. Leider existieren über die Eigenfrequenzen von *Cu* keine Angaben, so daß man nicht nachprüfen kann, ob die Sache auch quantitativ stimmt. — In den Formeln (15′) ist übrigens auch die von Haber[1]) angegebene Beziehung angenähert erfüllt, wonach die Eigenfrequenzen in den beiden Gebieten sich so verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Atom- und Elektronenmassen.

Trotzdem es nun im ersten Augenblick recht bestechend erscheint, daß man mit Hilfe der Raumgittervorstellung imstande ist, Eigenfrequenzen des festen Körpers zu rechnen, die gerade dort liegen, wo man sie nach der Dispersionstheorie zu erwarten hat, möchte ich doch auf dieses Resultat kein großes Gewicht legen, weil die Elektronenschwingungen wahrscheinlich intraatomistische Vorgänge sind und sich durch das einfache Schema Fig. 1 wohl nicht darstellen lassen werden.

1) F. Haber, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 1117, 1911.

(Schluß folgt im nächsten Heft.)

(Eingegangen 20. Dezember 1913.)

Aus der Annahme unabhängiger Lichtquanten folgt die Wiensche Strahlungsformel.

Von G. Krutkow.

Herr M. Wolfke hat in einer „Zur Quantentheorie" betitelten vorläufigen Mitteilung[1]) die Plancksche Strahlungsformel unter Voraussetzung einer atomistischen Struktur der Strahlung abgeleitet. Wie bekannt, wurde hingegen von Planck bei seinen Ableitungen dieser Strahlungsformel die letztere Voraussetzung nicht gemacht[2]). Andererseits hat Einstein die Grundvorstellungen seiner Lichtquantentheorie mit Hilfe der Wienschen Strahlungsformel gewonnen[3]). Berechnet man nämlich mit Hilfe dieser Formel die Abhängigkeit der Entropie einer Strahlung (von der Schwingungszahl ν und der Energie E_ν) von dem Volumen, so wird für die Differenz der Entropien des Volumens v und v_0 erhalten:

$$S - S_0 = \frac{E_\nu}{\beta\nu}\log\frac{v}{v_0}\ ^4).$$

Wendet man nun den Einsteinschen Kunstgriff an[5]), d. h. berechnet aus dieser Entropiedifferenz die relative Wahrscheinlichkeit, so wird erhalten:

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{E_\nu}{\beta k\nu}}\ ^6);$$

(k ist hier die auf ein Molekül bezogene Gaskonstante, β die zweite Konstante der Wienschen Strahlungsformel:

$$\varrho_\nu = \alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}\Big).$$

Dieser Ausdruck kann nun so interpretiert werden: die Strahlung setzt sich zusammen aus unabhängigen Lichtquanten von der Größe $\beta k\nu$. Aus der Planckschen Strahlungsformel berechnet sich dagegen — wie bekannt — eine wesentlich kompliziertere Abhängigkeit der Entropie vom Volumen, die nicht mehr der relativen Wahrscheinlichkeit einer Verteilung von unabhängigen Quanten über die Räume v und v_0 entspricht.

Ehrenfest hat auf folgendes hingewiesen[7]):

1) M. Wolfke, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 1123, 1215, 1913.

2) Man vergleiche insbesondere die §§ 141—143 der zweiten Auflage der Planckschen „Wärmestrahlung" mit § 148 der ersten.

3) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 132, 1905.

4) A. Einstein, l. c., S. 139.

5) P. und T. Ehrenfest, Encykl. d. math. Wiss. IV 32, S. 84.

6) A. Einstein, l. c., S. 143.

7) In einem Vortrage, gehalten im April 1911 vor der Petersburger physikalischen Gesellschaft; auch P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. **36**, 91, 1911.

stellt man die Grundannahmen der Einsteinschen Lichtquantentheorie zusammen:

(I.) Ein Resonator von der Schwingungszahl ν kann nur die Energiewerte haben: $0, h\nu, 2h\nu, \ldots,$

(II.) Diese Energiewerte kommen durch Aneinanderlagerung elementarer, voneinander unabhängiger Energiebeträge $h\nu$ zustande,

(III.) Existenz der Lichtquanten im materiefreien Raume

und berücksichtigt das Plancksche Verfahren zur Ableitung seiner Strahlungsformel, so kann man sich überzeugen, daß die Einsteinsche Theorie sich nicht nur durch die Annahme (III), sondern schon durch Annahme (II) von der Planckschen trennt[1]). Auf dasselbe wurde auch von Natanson hingewiesen[2]). Joffé hat auch mehrmals die Überzeugung ausgesprochen, daß man bei Annahme einer atomistischen Struktur der Strahlung zur Planckschen Strahlungsformel nur mittels einer Assoziation der Lichtquanten kommen kann[3]).

Man durfte vermuten: aus den Annahmen der Einsteinschen Lichtquantentheorie folgt die Wiensche Strahlungsformel.

Auch die Betrachtung der Einsteinschen Schwankungen[4]) liefert eine Stütze für diese Vermutung. Betrachtet man nämlich ein ebenes, die Schwingungszahl ν vollkommen reflektierendes Molekül, das nur senkrecht zu seiner Ebene beweglich ist und die mittlere Energie $\frac{kT}{2}$ besitzt, und setzt für das mittlere Quadrat der Impulsschwankung, die von der Strahlung während der Zeit τ dem Molekül mitgeteilt wird:

$$\frac{1}{c}\varrho_\nu h\nu \cdot d\nu \cdot \tau,$$

was aus der Lichtquantentheorie folgt, so wird die Wiensche Strahlungsformel erhalten.

Wir wollen aber nun, noch explizit zeigen, daß ein den Grundannahmen (I) und (II) der Lichtquanten- oder besser Lichtatomtheorie[5]) genügendes kombinatorisches Verfahren wirklich die Wiensche und nicht die Plancksche Strahlungsformel liefert.

Um unsere Wahrscheinlichkeitsansätze präzis formulieren zu können, wollen wir ein Urnenschema wählen. Wir werden die „Resonatorenterminologie" gebrauchen; man kann aber „Resonator" durch „Eigenschwingung" ersetzen.

§ 1. Das Urnenschema und seine Deutung. In einer Urne befindet sich die große Zahl Kugeln P. N von diesen Kugeln, die wir „farbige" Kugeln nennen wollen, haben alle Farben des Spektrums und repräsentieren die Resonatoren aller Schwingungszahlen. Auf die Farbe $(\nu, \nu + d\nu)$ entfallen N_ν Kugeln-(Resonatoren), so daß

$$N = \sum_\nu N_\nu .$$

Die übrigen $P - N$ Kugeln sollen etwa schwarz sein.

Wir machen nun P Züge, wobei wir nach jedem Zuge die gezogene Kugel nach Anschreibung ihrer Farbe in die Urne zurücklegen. Das $p$malige Erscheinen einer Kugel von der Farbe $(\nu, \nu + d\nu)$ soll bedeuten, daß das Schwingungszahlenintervall $(\nu, \nu + d\nu)$ p Quanten $h\nu$ erhält. Das Erscheinen einer schwarzen Kugel liefert keinen Beitrag zur Quantenzahl. Diese Kugeln sind nur eingeführt, um die Variabilität der Gesamtquantenzahl zum Ausdruck zu bringen. Es ist nämlich, auch bei gegebener Totalenergie, die Gesamtquantenzahl nicht gegeben, sondern variiert bei jeder Verwandlung der Strahlung, z. B. bei Überführung einer bestimmten Energiemenge aus dem roten Teil des Spektrums in den violetten.

Unser Schema genügt den Annahmen (I) und (II) der Einsteinschen Lichtatomtheorie:

(I.) Eine bestimmte „farbige" Kugel kann $0, 1, 2, \ldots$ mal erscheinen; ein Resonator von der Schwingungszahl ν kann nur die Energiewerte besitzen: $0, h\nu, 2h\nu, \ldots$.

(II.) Wir rechnen jedes Erscheinen einer farbigen Kugel als besonderes Ereignis an und haben es so eingerichtet, daß diese Ereignisse „unabhängige Ereignisse" sind; die Energiewerte kommen durch Aneinanderlagerung der unabhängigen Energiebeträge $h\nu$ zustande.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Kugel von der Farbe $(\nu, \nu + d\nu)$ gezogen wird, d. h. das Intervall $(\nu, \nu + d\nu)$ ein Quant $h\nu$ erhält, ist $\frac{N_\nu}{P}$; die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer schwarzen Kugel ist $1 - \frac{N}{P}$.

§ 2. Die Wahrscheinlichkeiten. Wir wollen die vorgegebene Totalenergie des Resonatorensystems erst später als Nebenbedingung hinschreiben, wie man es in der Gasstatistik gewohnt ist. Hier müssen wir also noch voraussetzen, daß ein Intervall $(\nu, \nu + d\nu)$ auch eine

1) P. Ehrenfest, l. c., S. 110 und 113.
2) L. Natanson, diese Zeitschr. **12**, 659, 1911.
3) A. Joffé, Ann. d. Phys. **36**, 534, 1911; siehe auch Journ. d. Russ. Phys.-Chem. Ges. 1910, 1912.
4) A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. **11**, 482, 1909; A. Einstein und L. Hopf, Ann. d. Phys. **33**, 1105, 1910.
5) Wir unterscheiden die Plancksche Theorie von der Einsteinschen durch die Bezeichnungen „Lichtstufentheorie" für die erstere, „Lichtatomtheorie" für die zweite.

beliebig große Zahl von Quanten $h\nu$ besitzen kann. Unser Schema aber liefert als maximale Quantenzahl, die ein Schwingungszahlenintervall erhalten kann, P — die Zahl der Züge. Wir müssen also P ins Unendliche wachsen lassen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei den P Zügen P_0 schwarze Kugeln gezogen werden, ferner ω_1 Kugeln von der Farbe 1, ω_2 von der Farbe 2 usw., d. h. die Wahrscheinlichkeit der durch die ω_ν gegebenen Verteilung der Quanten über die Schwingungszahlen ist:

$$W = \frac{P!}{P_0!\,\omega_1!\,\omega_2!\ldots\omega_\nu!\ldots}\left(1-\frac{N}{P}\right)^P \cdot \left|\begin{array}{c} \\ \left(\frac{N_1}{P}\right)^{\omega_1}\left(\frac{N_2}{P}\right)^{\omega_2}\cdots\left(\frac{N_\nu}{P}\right)^{\omega_\nu}\cdots \end{array}\right| \qquad (a)$$

Läßt man nun P ins Unendliche gehen, so wird, wie aus der Theorie der Schwankungen bekannt ist[1]), W gleich:

$$W = e^{-(N_1+N_2\ldots+N_\nu+\ldots)}\frac{N_1^{\omega_1}N_2^{\omega_2}\ldots N_\nu^{\omega_\nu}\ldots}{\omega_1!\,\omega_2!\ldots\omega_\nu!\ldots} \qquad (a_1)$$

oder:

$$W = \prod_\nu e^{-N_\nu}\frac{N_\nu^{\omega_\nu}}{\omega_\nu!}. \qquad (a_2)$$

Es zerfällt also die „polychromatische" Wahrscheinlichkeit in ein Produkt „monochromatischer". Der Faktor

$$e^{-N_\nu}\frac{N_\nu^{\omega_\nu}}{\omega_\nu!}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Intervall $(\nu, \nu+d\nu)$ ω_ν Quanten erhält[2]). Läßt man das bedeutungslose e^{-N_ν}, das nur bewirkt, daß die Summe der W gleich 1 wird, weg, so kann gegenübergestellt werden:

Planckschе Lichtstufentheorie

$$\frac{(N_\nu+\omega_\nu-1)!}{(N_\nu-1)!\,\omega_\nu!}\,^{3}),$$

Einsteinsche Lichtatomtheorie

$$\frac{N_\nu^{\omega_\nu}}{\omega_\nu!}. \qquad (a_3)$$

Ist uns bekannt, daß ω_ν Quanten in das Intervall $(\nu, \nu+d\nu)$, d. h. auf die N_ν Resonatoren fallen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Resonator $\omega_{\nu 1}$ Quanten erhält, der zweite $\omega_{\nu 2}$ usw., gegeben durch

$$w = \frac{\omega_\nu!}{\omega_{\nu 1}!\,\omega_{\nu 2}!\ldots\omega_{\nu N_\nu}!}\left(\frac{1}{N_\nu}\right)^{\omega_\nu}. \qquad (b)$$

An dieser Formel sieht man die Analogie mit der gewöhnlichen Molekülkombinatorik am deutlichsten.

Ehrenfest[1]) hat den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit angegeben, die zur Wienschen Spektralformel führt. Es werden die N_ν Resonatoren des Intervalls $(\nu, \nu+d\nu)$ (unter der Voraussetzung (1)) über die Punkte 0, $h\nu$, $2h\nu$, ... der „Energielinie" verteilt. Die Grundlagen der Planckschen Formel sind, wie bekannt, die folgenden[2]): die Punkte 0, $h\nu$, $2h\nu$, ... müssen mit gleichen Gewichten A belegt werden. Die Wahrscheinlichkeit einer Verteilung:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \quad (\Sigma a_\nu = N_\nu)$$

ist

$$\mathfrak{W} = \frac{N_\nu!}{a_0!\,a_1!\,a_2!\ldots}A^{N_\nu}.$$

Um die Wiensche Strahlungsformel abzuleiten, muß man die konsekutiven Punkte mit den Gewichten belegen:

$$\frac{1}{0!},\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \ldots$$

$$\mathfrak{W} = \frac{N_\nu!}{a_0!\,a_1!\,a_2!\ldots}\left(\frac{1}{0!}\right)^{a_0}\left(\frac{1}{1!}\right)^{a_1}\left(\frac{1}{2!}\right)^{a_2} \qquad (c)$$

Wir werden nun die Formel (c) aus unseren Formeln (b) und (a_3) herleiten.

Bezeichnen wir die N_ν Zahlen $\omega_{\nu 1}, \omega_{\nu 2}, \ldots \omega_{\nu N_\nu}$ der Formel (b) mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und fragen nach der Wahrscheinlichkeit w, daß **irgendein** Resonator α Quanten hat, **irgendein** anderer β Quanten usw., wobei

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots = \omega_\nu$$

gegeben ist, so wird w erhalten durch Multiplikation von w (b) mit der Zahl der Permutationen aus N_ν Elementen. Sind in der Reihe

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$$

a_0 Zahlen gleich 0, a_1 gleich 1, a_2 gleich 2 usw., d. h. haben a_0 Resonatoren die Energie 0, a_1 die Energie $h\nu$ usw., so ist diese Zahl der Permutationen gleich:

$$\frac{N_\nu!}{a_0!\,a_1!\,a_2!},$$

also

$$w = \frac{N_\nu!}{a_0!\,a_1!\,a_2!}\,\frac{\omega_\nu!}{(0!)^{a_0}(1!)^{a_1}(2!)^{a_2}\ldots}\left(\frac{1}{N_\nu}\right)^{\omega_\nu}.$$

---

1) L. v. Bortkewitsch, Das Gesetz der kleinen Zahlen, Leipzig 1898, S. 1; M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Festschrift 1904, S. 626.

2) Das kann auch direkt abgeleitet werden: die Wahrscheinlichkeit, daß bei den P Zügen ω_ν und nur ω_ν Kugeln von der Farbe ν gezogen werden, ist:

$$\frac{P!}{\omega_\nu!\,P-\omega_\nu!}\left(\frac{N_\nu}{P}\right)^{\omega_\nu}\left(1-\frac{N_\nu}{P}\right)^{P-\omega_\nu},$$

und das gibt für $\lim P=\infty$:

$$e^{-N_\nu}\frac{N^{\omega_\nu}}{\omega_\nu!}.$$

3) Hier bedeutet ω_ν gewiß nicht eine Zahl der Quanten. M. Planck, Wärmestrahlung, II. Aufl., §§ 141—143.

1) P. Ehrenfest, l. c., S. 108.

2) M. Planck, Vorles. über die Theorie d. Wärmestrahlung, II. Aufl., S. 122, 136.

Dieser Ausdruck findet sich schon in der zitierten Abhandlung von Natanson[1]). Multiplizieren wir noch $\mathfrak{w}$ mit der Wahrscheinlichkeit, daß ω_ν Quanten den N_ν Resonatoren zufallen, d. h. mit (a_2), so wird der von Ehrenfest angegebene Ausdruck erhalten:

$$\mathfrak{W} = \frac{N_\nu!}{a_0!\,a_1!\,a_2!\ldots}\left(\frac{1}{0!}\right)^{a_0}\left(\frac{1}{1!}\right)^{a_1}\left(\frac{1}{2!}\right)^{a_2}\cdot \quad (c)$$

§ 3. Herleitung der Wienschen Strahlungsformel. In üblicher Weise finden wir die wahrscheinlichste Verteilung bei gegebener Totalenergie E, wenn wir die Verteilung ω_ν bestimmen, die $\log W$ (a_2) zu einem Maximum macht bei der einzigen Nebenbedingung:

$$E = \sum_\nu E_\nu = \sum \omega_\nu \cdot h\nu .$$

Ist A der Lagrangesche Multiplikator dieser Nebenbedingung, so wird erhalten:

$$\frac{\omega_\nu}{N_\nu} = e^{-Ah\nu}.$$

$\frac{\omega_\nu}{N_\nu}$ ist die mittlere Zahl der Quanten, die auf einen Resonator der Schwingungszahl ν fallen. Die mittlere Energie dieses Resonators ist:

$$U_\nu = h\nu \frac{\omega_\nu}{N_\nu} = h\nu \cdot e^{-Ah\nu}.$$

Damit haben wir die Wiensche Strahlungsformel gewonnen. A läßt sich wohl am besten bestimmen, wenn man zu unserem System ein ideales Gas hinzufügt und unsere Nebenbedingung ersetzt durch die Gesamtenergie des zusammengesetzten Systems. Der Multiplikator dieser Nebenbedingung ist bekannt:

$$A = \frac{1}{kT}.$$

Gehen wir zur Energiedichte $\varrho_\nu d\nu$ über, indem wir etwa von der Resonatorenterminologie zur Eigenschwingungsterminologie übergehen und für N_ν setzen: $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$, oder die Plancksche Beziehung[2]) heranziehen:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U_\nu,$$

so erhalten wir durch Integration die Gesamtenergie E und die Gesamtquantenzahl Z:

$$E = \frac{8\pi h}{c^3}\cdot\frac{(kT)^4}{h^4},$$

$$Z = \frac{8\pi}{c^3}\cdot\frac{2(kT)^3}{h^3}.$$

1) L. Natanson, l. c., S. 661, Formel (11); H. A. Lorentz, diese Zeitschr. **11**, 1253, 1910; A. Sommerfeld, diese Zeitschr. **12**, 1066, 1911.

2) Planck, Vorles. über die Theorie d. Wärmestrahlung, I. Aufl., S. 124, Formel (194).

Das Verhältnis $\frac{E}{Z}$ ist das mittlere $h\nu$

$$\overline{h\nu} = \frac{E}{Z} = 3kT\ ^1).$$

§ 4. Unser Schema muß radikal verändert werden, wenn man die Planck sche Formel erhalten will. Es darf nicht mehr der Annahme (II) genügen. Hat ein Resonator die Energie $2h\nu$, so bedeutet es gar nicht, daß er ein Lichtatom und dann noch eins erhalten hat. Will man die Grundlagen der „Lichtatomtheorie" festhalten, so muß man, wie Joffé bemerkt hat[2]), eine Assoziation der Quanten einführen. Man sieht das leicht ein, wenn man der Planckschen Formel die Gestalt gibt:

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}h\nu\sum_{r=1}^{\infty}e^{-r\frac{h\nu}{kT}}.\ ^3) \quad (1)$$

Für die mittlere Energie des „Lichtmoleküls" erhält man leicht wieder $3kT$. Hingegen ist das mittlere $h\nu$ (Lichtatom) nach der Planckschen Formel gleich:

$$\overline{h\nu} = 0{,}9000\ldots \times 3kT\ ^4). \quad (2)$$

Man könnte natürlich auch versuchen, den aus (1) bestimmten Assoziationsgrad aus besonderen Wahrscheinlichkeitsansätzen abzuleiten.

Zusammenfassend können wir sagen:

Sind die Annahmen (I) und (II) gemacht, so folgt aus ihnen mit Notwendigkeit die Wiensche und nicht die Planck sche Strahlungsformel.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 143, 1905.
2) A. Joffé, Ann. d. Phys. **36**, 530, 1911.
3) Jun Ishiwara, diese Zeitschr. **13**, 1144, 1912.
4) H. A. Wilson, Phil. Mag. **20** (6), 123, 1910.

Leiden, Dezember 1913.

(Eingegangen 6. Januar 1914.)

Zur Frage der Intensitätsverteilung in den Röntgenstrahlen-Interferenzphotographien.

Von J. Kern.

Die obige Frage ist in letzter Zeit mehrfach erörtert worden. In dieser Zeitschrift haben die Herren Ewald, Ornstein und v. Laue zu ihr Stellung genommen.

Herr Ewald kommt (diese Zeitschr. **14**, 470, 1913) zu dem Resultat, daß unter Voraussetzung eines kontinuierlichen Spektrums von beschränkter Ausdehnung dessen Intensität innerhalb dieses Bereiches wenig variiert, die Zahl der Wellenlängen, die innerhalb dieses Bereiches Reflexionen 1-, 2-, ... $p$ter Ordnung liefern, proportional dem Molekülreichtum der reflektieren-

den Kristallebene ist. Dieser Einfluß der Moleküldichte dürfte jedoch nur von sekundärer Bedeutung sein, da bei der geringen Ausdehnung der Spektra und der Schwächung der Reflexionen höherer Ordnungen durch Wärmebewegung (siehe Debye, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 857, 1913) in Wirklichkeit bei keiner Ebene mehr als zwei Ordnungen von Reflexionen beobachtbare Intensitäten haben dürften.

Auf einem ganz anderen Wege kommt Herr Ornstein (diese Zeitschr. **14**, 1230, 1913) zu demselben Resultat. Er berücksichtigt, daß nicht nur diejenige Wellenlänge, die der Beziehung $p\lambda = 2d\cos\vartheta$ genügt, sondern auch die ihr nahe benachbarten etwas zur Intensität in der Reflexionsrichtung beitragen, und integriert daher über ein schmales, $\lambda = \frac{2d\cos\vartheta}{p}$ umgebendes Bereich.

Herr v. Laue hat schließlich (diese Zeitschr. **14**, 1286, 1913) die Ableitung von Herrn Ornstein einer Kritik unterzogen. Er zeigt folgendes: Berücksichtigt man, daß bei der Reflexion von einer Ebene auch die der Reflexionsrichtung nahe benachbarten Richtungen noch merkbare Intensitäten zeigen, und daß bei der wirklichen Beobachtung die in diesem ganzen sehr kleinen Öffnungswinkel befindliche Energie gemessen wird, so ergibt sich allerdings für eine Ebene Proportionalität zur Molekülzahl N. Summiert man aber über alle n Parallelebenen, so erhält man Proportionalität zu Nn, d. i. zur Gesamtzahl der beleuchteten Moleküle, und vom Einfluß der Moleküldichte bliebe höchstens in dem von Herrn Ewald angedeuteten Sinn etwas übrig. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß Herr v. Laue die Integration über λ nicht ausgeführt hat.

Herr H. A. Lorentz hat nun in seiner Leidener Vorlesung Formeln für die Intensität der Flecken abgeleitet, die alle drei auszuführenden Integrationen berücksichtigen. Ich will in Anlehnung an diese Formeln zeigen, daß die Schwärzung der Flecken proportional dem Quadrat des Molekülreichtums der reflektierenden Kristallebene ist, und zwar werde ich dieses Resultat sowohl für Fraunhofersche Rechnungsweise als unter Berücksichtigung der Endlichkeit der Entfernungen Lichtquelle—Kristall—Aufpunkt ableiten.

I. Unendliche Entfernungen Lichtquelle—Kristall—Aufpunkt[1]).

1) Aus einem Gespräch mit Herrn Debye erfahre ich, daß er dieselbe Frage in einer demnächst in den Annalen erscheinenden Abhandlung (inzwischen erschienen: Ann. d. Phys. (4) **43**, 49, 1914. D. Red.) erwähnt hat. Er gibt dort auch eine Ableitung der Lorentzschen Formel. Ich werde dieselbe daher hier nur andeuten.

Auf das kubische in der in Fig. (1) angedeuteten Weise orientierte Raumgitter (Gitterkonstante a) falle in der Richtung der x-Achse eine primäre ebene Röntgenerregung auf.

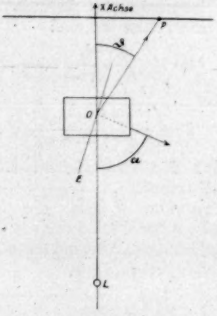


Fig. 1.

Der beleuchtete Teil des Kristalls sei parallelepipedisch; die Zahl der beleuchteten Moleküle in der X-, Y-, Z-Richtung N_1, N_2, N_3; ihre Gesamtzahl daher:

$$N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = Z.$$

Die Entfernungen $LO = l$, $OP = l'$ seien sehr groß (so daß wir Fraunhoferisch rechnen dürfen). Die Richtungscos. von OP seien u, v, w; die Polarkoordinaten von P in bezug auf $O{:}l'$, ϑ, φ. Dann ist die Intensität in P:

$$S = \frac{\sin^2\frac{1}{2}N_1 Ka(1-u)}{\sin^2\frac{1}{2}Ka(1-u)} \cdot \frac{\sin^2\frac{1}{2}N_2 Kav}{\sin^2\frac{1}{2}Kav} \cdot \frac{\sin^2\frac{1}{2}N_3 Kaw}{\sin^2\frac{1}{2}Kaw},$$

worin $K = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Wählt man jetzt P so, daß es ein Maximum der Ordnungen $h_1 h_2 h_3$ — oder was dasselbe ist — der Reflexionspunkt von der Kristallebene $h_1 h_2 h_3$ ist, nennt man die dieser Reflexion entsprechende Wellenlänge $\lambda_0 \left(= 2d\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$, und integriert man über ein kleines, λ_0 umgebendes Bereich sowie einen kleinen, OP umgebenden Öffnungswinkel, so erhält man:

$$I = \int\int\int \frac{i\psi}{l'^2} S \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot d\varphi \cdot dK.$$

Darin bedeutet i die spezifische Intensität von λ,

ψ ist identisch mit der Laueschen Richtungsfunktion.

Durch Einführung geeigneter neuer Integrationsvariabeln, Bestimmung der Integrationsgrenzen und Berücksichtigung der Konstanz von ϑ und i innerhalb des kleinen Integrationsbereiches erhält man hieraus:

$$I = \frac{8\pi^3 i_0 \psi^2}{l^2 a^3 K_0^2 (1 - \cos\vartheta)} Z \qquad (1)$$

oder auch

$$I = \frac{2\pi i_0 \psi^2 \lambda_0^2}{l^2 a^3 (1 - \cos\vartheta)} Z. \qquad (2)$$

Dies ist die von Herrn Lorentz abgeleitete Formel.

Es seien nun $h_1 h_2 h_3$ die Millerschen Indizes von E, α der Winkel der Ebenennormalen mit der x-Achse, d der Abstand der nächstbenachbarten Parallelebene. Es ist

$$\vartheta = \pi - 2\alpha, \qquad \cos\vartheta = -\cos 2\alpha.$$

Das einfallende Spektrum sei kontinuierlich und erstrecke sich von o bis, ∞, wobei natürlich merkbare Intensitäten nur in einem kleinen — etwa eine Oktave umspannenden — Bereich vorhanden sein können. Wir bezeichnen jene Wellenlänge, die der Reflexion p ter Ordnung entspricht, mit $\lambda_0^{(p)}$, die ihr entsprechende spezifische Intensität mit $i_0^{(p)}$. Ferner setzen wir: $\frac{2\pi\psi^2}{l^2} Z =$ einer Konstanten C.

Es ist $\lambda_0^{(p)} = \frac{2d\cos\alpha}{p}$, und wir erhalten aus (2):

$$I = \frac{C}{a^3} \cdot \frac{4d^2\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\left(i_0^{(1)} + \frac{i_0^{(2)}}{2^2} + \frac{i_0^{(3)}}{3^2} + \cdots\right)^{1)}$$

$$= \frac{C}{a^3}\left(i_0^{(1)} + \frac{i_0^{(2)}}{2^2} + \cdots\right) d^2,$$

oder unter Berücksichtigung von

$$d = \frac{a}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}:$$

$$I = \frac{C}{a} \frac{1}{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{i_0^{(p)}}{p^2}, \qquad (3)$$

also:

Die Intensität des Fleckes in der photographischen Platte ist proportional dem Quadrat des Molekülreichtums der reflektierenden Ebene.

Diese Aussage ist jedoch cum grano salis zu nehmen. Der Faktor $\sum \frac{i_0^{(p)}}{p^2}$ kann nämlich bei einem einigermaßen unregelmäßigen Spektrum für verschiedene Ebenen ganz verschiedene Werte annehmen und die glatte Proportionalität mit dem Quadrat des Molekülreichtums erheblich stören, so daß es selbst eintreten kann, daß molekülarme Ebenen viel stärker reflektieren als molekülreiche[1]). Wie Herr Wagner gezeigt hat (diese Zeitschr. **14**, 1232, 1913) kommen jedenfalls noch Reflexionen zweiter Ordnung in Betracht, doch könnten bei der langen Expositionsdauer der Röntgenogramme auch noch Reflexionen dritter Ordnung die Intensität beeinflussen. Die Schlüsse aus den Schwärzungen der Flecken auf die Kristallstruktur sind daher stets in dieser Richtung zu prüfen. Benutzt man wie Bragg eine sehr annähernd monochromatische Strahlung, so fallen natürlich diese Bedenken weg.

Berücksichtigt man noch die Schwächung der Intensität der Laue-Interferenzbilder durch Wärmebewegung, so wird obige Formel in einer Weise modifiziert, die die molekülreichen Ebenen noch mehr begünstigt. Nach Debye tritt bekanntlich infolge der Wärmebewegung der Moleküle mit wachsender Temperatur einerseits eine Intensitätsvermehrung des Hintergrundes, andererseits eine Schwächung der Intensität des Laue-Interferenzbildes auf, die durch Multiplikation desselben mit dem Faktor e^{-M} gegeben ist.

Dabei ist in unseren früheren Bezeichnungen:

$$M = \frac{4\pi^2 k T}{f} \cdot \frac{2(1-\cos\vartheta)}{\lambda_0^{(p)2}} = \frac{4\pi^2 k T}{f} \frac{p_2}{d^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 k T}{f a^2} (h_1^2 + h_2^3 + h_3^2) p^2,$$

und es lautet (3) jetzt:

$$I = \frac{C}{a} \frac{1}{(h_1^2+h_2^2+h_3^2)} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{i_0^{(p)}}{p^2} e^{-\left(\frac{4\pi^2 k T}{f a^2}\right)(h_1^2+h_2^2+h_3^2)p^2} \qquad (4)$$

Wir haben also erhalten:

1. Die Kristallebenen reflektieren proportional dem Quadrat ihres Molekülreichtums und einem Faktor der von der Intensitätsverteilung des Spektrums und der Wärmebewegung abhängt.

2. Die Größe des Exponenten ihres Debyeschen Schwächungsfaktors ist umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Molekülreichtums, so daß der Einfluß der Wärmebewegung um so schwächer ist,

1) Der Ansatz, daß man die Reflexionen der verschiedenen Ordnungen so behandeln kann, als ob sie nicht interferieren würden, ist bekanntlich dadurch zu rechtfertigen, daß bei der Integration über eine zur Intensitätsmessung erforderliche Zeit und Mittelwertsbildung die sin-Produkte ungleicher Frequenzen Null ergeben.

1) Vermutlich ist allerdings bei den Röntgenphotographien, mit seltenen Ausnahmen, nur die „zerstreute" Strahlung wirksam, die ein regelmäßig verlaufendes Spektrum besitzt.

je molekülreicher die betreffende Ebene ist. (Vgl. hierzu M. v. Laue, Deuxième Conseil de Physique Solvay 1913.)

Der Faktor C unserer Formel enthält Z, d. i. die Gesamtzahl der beleuchteten Moleküle, so daß Proportionalität mit dieser für alle Flecken in gleicher Weise besteht; hinzu tritt jedoch für jeden Fleck noch der von uns berechnete, durch die Indizes der reflektierenden Ebene bestimmte Faktor.

Die obigen Formeln wurden für eine punktförmige Antikathode abgeleitet, doch ist es leicht ersichtlich, daß sie sich ohne weiteres auf eine Antikathode von nicht zu großer Ausdehnung anwenden lassen, wenn man dieselbe als ein Aggregat von Punkten auffaßt. Auch die Spezialisierung auf ein kubisches Raumgitter von besonderer Orientierung gegen den einfallenden Strahl ist für das Resultat von keiner Bedeutung. Eine andere Frage ist es, wie dasselbe durch Berücksichtigung der Endlichkeit der Entfernungen Lichtquelle—Kristall—Aufpunkt modifiziert werden könnte. Wir werden daher unser Resultat auch unter dieser Annahme ableiten.

II. Endliche Entfernungen Lichtquelle—Kristall—Aufpunkt.

Hier würde eine exakte Ausführung der Rechnung auf große Schwierigkeiten stoßen[1]). Man kann jedoch wesentliche Vereinfachungen einführen, wenn man sich auf Ebenen von nicht sehr großer Molekülarmut beschränkt. In diesem Falle kann man, um die Amplitude in P zu erhalten, die durch Zusammenwirken der Moleküle einer Kristallebene entsteht, das Problem behandeln, wie das der Reflexion von einem Spiegel. Man kann in E eine Einteilung in Fresnelsche Zonen ausführen und zeigen, daß für P nur die erste Zone AA' (Fig. 2), deren Fläche $= \frac{\pi}{\cos\alpha}\frac{ll'\lambda}{l+l'}$ ist, in Betracht kommt. Es ergibt sich dann für die von einer Ebene herrührende Amplitude:

$$\frac{A\psi n}{(l+l')}\cdot\frac{2\pi}{\cos\alpha}\sin K(ct-l-l'),$$

worin n die Moleküldichte der Ebene E angibt. Berücksichtigt man nun die übrigen, zu E parallelen Ebenen des Kristalls, berücksichtigt man ferner wiederum, daß es in P ein λ_0 gibt, das die Maximalintensität liefert, daß es aber

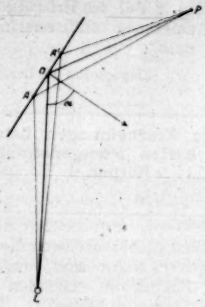


Fig. 2.

einer Integration über λ bedarf, um die Totalintensität in P zu erhalten, so ergibt sich nach Lorentz:

$$I_P = \frac{4\pi^3 i n^2 s \psi^2}{K^2(l+l')^2\cos^3\alpha : \triangle}, \qquad (5)$$

worin s die Zahl, $\triangle$ den kürzesten Abstand der Parallelebenen bedeutet.

Führt man hierin für $s\triangle \ldots D$, d. i. die Dicke des Kristalls in der Richtung der Ebenennormalen ein und für $K\ldots$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\triangle\cos\alpha},$$

so erhält man:

$$I_P = \frac{4\pi i \psi^2}{(l+l')^2}\cdot\frac{D}{\cos\alpha}\cdot n^2. \qquad (6)$$

$\frac{D}{\cos\alpha}$ ist eine langsam veränderliche Gestaltsfunktion, man kann also auch hier:

$$\underline{I_P \sim n^2}$$

setzen.

Berechnet man die gesamte in dem durch das von L ausgehende Lichtbündel erzeugten Fleck befindliche Energie, so ergibt sich mit — hier gestatteter — Vernachlässigung der am Rande abgebeugten Energie:

$$E_F = \frac{4\pi^3 i \psi^2}{(l+l')^2}\frac{DF}{\cos\alpha}\cdot n^2\,^1).$$

Nennt man den Querschnitt des Bündels in O Σ, so wird:

$$F = \frac{(l+l')^2}{l^2}\Sigma$$

und:

$$E_F = \frac{4\pi^3 i \psi^2}{l^2} D\cdot\frac{\Sigma}{\cos\alpha}n^2 = \frac{4\pi^3 i \psi^2 V}{l^2}\cdot n^2,$$

1) Die Rechnung unter Berücksichtigung der Endlichkeit der Entfernung Antikathode—Kristall, wobei jedoch die Entfernung Kristall—Aufpunkt als ∞ angenommen wird, findet sich in der Arbeit von M. v. Laue und F. Tank: „Gestalt der Interferenzpunkte bei Röntgenstrahleninterferenzen", Ann. d. Phys. **41**, Heft 5). Durch Berücksichtigung der Endlichkeit beider Entfernungen würde sich die Rechnung sehr komplizieren.

1) Innerhalb des Fleckes ist I_P bis auf Größen zweiter Ordnung konstant.

(V = beleuchteter Teil des Kristalls) — also wie nach der Anmerkung selbstverständlich auch proportional zu n^2.

(Eingegangen 26. Dezember 1913.)

Über einige Erscheinungen beim Durchgang von harten Röntgenstrahlen durch Körper.[1]

Von J. Laub.

Es sei gestattet, im folgenden einige Beobachtungen kurz zu beschreiben, die, wenn sie auch qualitativer Natur sind, mit Rücksicht auf die zur Diskussion stehenden Probleme, ein gewisses Interesse haben[2]).

Vor einiger Zeit wurde in einer Notiz in dieser Zeitschrift (**14**, 1209, 1913) von mir darauf hingewiesen, daß dicke Schwefel- und Holzkohlenplatten eine sehr homogene, harte Eigenstrahlung emittieren. Es wurde ferner auch die Vermutung ausgesprochen, daß diese Strahlen vielleicht beim Durchgang durch Materie Interferenzerscheinungen zeigen. Um diese Vermutung zu prüfen, ließ ich zuerst Röntgenstrahlen, die durch Holzkohle (Kahlbaum) gegangen sind, auf eine photographische Platte fallen. Es war mir von Anfang an klar, daß irgendwelcher Erfolg nur dann zu erwarten war, wenn die Platten ziemlich stark sind. Denn ich konnte mich überzeugen, daß die homogene Eigenstrahlung der Kohle und des Schwefels mit der Dicke sehr stark zunimmt[3]). Ist es also richtig, daß die Röntgenstrahlen — wenigstens die Eigenstrahlen — eine Wellenlänge von 10^{-9} cm besitzen, wie es ja aus den grundlegenden Versuchen der Herren Friedrich, Knipping und Laue folgt, so war es nicht ausgeschlossen, daß die sehr kräftigen homogenen Eigenstrahlen, auch bei der Durchquerung amorpher Körper, insbesondere, wenn sie große Strecken zu durchwandern haben, interferenzartige Bilder liefern.

Als ich nun Kohlenplatten von etwa 5 mm Dicke den Röntgenstrahlen aussetzte, konnte ich trotz stundenlanger Exposition weder bei der Anwendung von harten, noch von weichen Röhren irgendwelche Beugung oder Interferenzerscheinung finden. Auf der Platte war nur der scharf umgrenzte Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen zu sehen. Bemerkt muß werden, daß ich mit dem Elektrometer bei den dünnen Kohlenplatten eine homogene Eigenstrahlung nicht feststellen konnte.

Daraufhin wurden gleich Platten von 3 cm Dicke gewählt.

Die Kohlen und die photographischen Platten befanden sich in einem Bleikasten, dessen Wände 1 cm dick waren. Die Röntgenstrahlen hatten zuerst ein Diaphragma von 1 cm Durchmesser zu passieren, ferner zwei Öffnungen von 5 mm Durchmesser. Sämtliche Blenden waren in 1 cm dicke Bleischeiben gebohrt, so daß alles auf das sorgfältigste geschützt war. Der Abstand Antikathode—bestrahlter Körper betrug 30 cm

bestrahlter Körper — erste photographische Platte 2 cm,
bestrahlter Körper — zweite photographische Platte 4 cm,
bestrahlter Körper — dritte photographische Platte 6 cm.

Zur Anwendung gelangten Rapidröhren mit Wasserkühlung von Müller. Der Induktor wurde mit 110 Volt und 4 Amp. gespeist; zur Unterbrechung des Primärstroms diente ein Quecksilberturbinenunterbrecher. Als Aufnahmematerial wurden Lumière-Platten (Plaques radiographiques X) gebraucht, die mir hier allein zur Verfügung standen. Von Anfang an habe ich große photographische Platten (13—18) genommen. Die ersten Versuche sind mit einer harten Röhre ausgeführt worden.

Bereits nach einer Belichtungszeit von 100 Minuten erhielt ich auf der Platte ein Bild, das lebhaft an die bekannte „Haloerscheinung erinnert". In der Mitte ist der Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen zu sehen, an den sich ein Kreis von abnehmender Schwärze anschließt, dann kommt ein heller scharfer Ring, dann ein breiter dunkler Ring und zum Schluß ein scharfer heller Ring[1]). Der Versuch wurde dreimal wiederholt.

Daraufhin ist eine 9 cm dicke Kohlenplatte der Wirkung von sehr harten Röntgenstrahlen ausgesetzt worden und außerdem wurde der Durchmesser der Blenden auf 2 mm verkleinert. Ich war sehr überrascht, nach einer Belichtungszeit von 100 Minuten auf der photographischen Platte folgendes zu sehen:

1) Erscheint aus äußeren Gründen verspätet. (D. Red.)

2) Ich veröffentliche meine Beobachtungen auch deshalb schon jetzt, weil ich weitere klärende Versuche erst nach Monaten vornehmen kann.

3) Anmerkung bei der Korrektur: Daß die harten Eigenstrahlen mit der Dicke des Körpers zunehmen und bei sehr dünnen Platten sich der Beobachtung entziehen ist leicht erklärlich. Denn damit eine meßbare Eigenstrahlung entsteht, muß eine bestimmte Energiemenge von den auslösenden Primärstrahlen an den Körper abgegeben werden, was bei harten Röntgenröhren nur dann eintreten kann, wenn die Primärstrahlen größere Strecken durchlaufen. Ist die emittierende Platte sehr dünn, so wird sehr wenig von den durchgehenden harten Primärstrahlen absorbiert und es entsteht auch eine verschwindend kleine Anzahl von Eigenstrahlen.

1) Es ist mir leider vorläufig unmöglich, hier eine Photometrierung der Photographien vorzunehmen.

Den Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen umgeben von einem „Halo", ähnlich wie bei der Kohle von 3 cm und in einer Entfernung von 18 mm eine genaue Wiederholung des ersten Bildes, mit dem Unterschiede, daß der zweite Fleck kleiner und weniger intensiv war. Der Versuch wurde zweimal wiederholt, und zwar jedesmal mit drei hintereinander gestellten photographischen Platten. Eine Verlängerung der Expositionszeit auf 300 Minuten hat an der Erscheinung nichts geändert, nur waren die Flecke viel stärker geschwärzt als früher.

Ferner wurde eine 2 cm dicke Schwefelplatte den harten Röntgenstrahlen ausgesetzt. Auf der Platte waren außer dem Durchstoßungspunkte noch drei Flecke (Kreise), aber ohne Ringe zu sehen.

Um nun zu sehen, wie sich Metalle verhalten beim Durchgang von harten Röntgenstrahlen, habe ich Versuche mit einer Zinkplatte von der Dicke 0,6 mm, Kupfer 0,2 mm und Aluminium von 1 mm gemacht, wobei folgendes gefunden wurde: Der Durchstoßungspunkt ist umgeben von einem hellen Ring, von dem sich dunkle Striche in Form eines Sterns anschließen.

Die gefundenen Erscheinungen möchte ich auf Ablenkungen und Beugungen, die die ausgelösten Eigenstrahlen durch die Atome erleiden, zurückführen.

Folgende Tatsachen scheinen darauf hinzuweisen, daß die oben beschriebenen Beobachtungen hauptsächlich durch sekundäre Strahlen hervorgerufen werden, die durch die primären beim Durchgang durch den Körper ausgelöst werden.

a) Die Photographien wurden bei der Durchstrahlung der Kohle und des Schwefels mit harten Röhren erhalten, die harten Strahlen sind es aber auch, die in *C* und *S* eine sehr homogene Eigenstrahlung auslösen.

b) Bei den sehr dicken *C*- und *S*-Platten, die eine sehr intensive Eigenstrahlung emittieren, waren auch die Bilder sehr stark ausgeprägt.

c) Wurden hinter die erste photographische Platte dünne Glasscheiben gesetzt, so waren dadurch die Bilder bei Kohle und Schwefel auf den weiteren Platten fast ungeschwächt, entsprechend der großen Durchdringungsfähigkeit der Eigenstrahlung des *C* und *S*. Die bei der Durchstrahlung des *Zn* und *Cu* erzeugten „Sterne" waren sehr matt.

Buenos-Aires, Departemento de Fisica del Instituto Nacional del Profesorado Secundario, 1. Oktober 1913.

(Eingegangen 14. November 1913.)

Die optische Anisotropie der flüssigen Kristalle.

Von D. Vorländer.

(Mitteilung aus dem Chemischen Institut der Universität Halle a. S.)

An den flüssigen, oft gut entwickelten stäbchenförmigen Kristallen und an den flüssigen Kristallplatten von vielen organischen Verbindungen konnte ich mit den Hilfsmitteln, die auch bei festen Kristallen angewendet werden, nachweisen, daß die flüssigen Kristalle im allgemeinen eine Ähnlichkeit miteinander haben. Trotz der verschiedenen inneren Reibung der Flüssigkeiten und trotz der sehr verschiedenen Zusammensetzung der Substanzen als Alkalisalze, Säuren, Ester, Ketone, Azokörper, Azoxyverbindungen u. a. bleiben bestimmte Formen der flüssigen Kristalle die gleichen. Soweit die Untersuchung reicht, sind die flüssigen Kristalle organischer Verbindungen sämtlich optisch einachsig in ihren primären Formen. An dem umfangreichen Material von rund 900 chemischen Verbindungen, unter denen etwa 400 neue kristallinisch flüssige Substanzen aufgefunden wurden, ließ sich ermitteln, daß jener optisch einachsigen Form der flüssigen Kristalle bis zu einem gewissen Grade die Form der chemischen Moleküle[1]) entspricht: die Moleküle derjenigen Substanzen, welche optisch anisotrope flüssige Kristalle liefern, haben eine möglichst langgestreckte „lineare" Gestalt[2]). Es ergab sich ferner, daß außer der Gestalt auch die energetische, im besonderen die polare Beschaffenheit der chemischen Moleküle als wesentlich für den flüssig-kristallinen Zustand der Substanzen einzusetzen ist[3]). Man darf sagen, daß die Beziehungen zwischen Molekül und Kristall bei den Flüssigkeiten viel deutlicher zutage treten, als bei den festen kristallinischen Stoffen[4]), wenn auch bei den flüssigen Kristallen die geometrischen Verhält-

1) Da in kristallographischen und physikalischen Abhandlungen das Wort „Molekül" oft so viel bedeutet als „Kristallmolekül" im Sinne von Kristall-Elementarteilchen, so habe ich mit dem Ausdruck „chemisches Molekül" betonen wollen, daß ich das Wort Molekül nur im chemischen Sinne, und somit ohne Berücksichtigung der äußeren kristallinen oder amorphen Gestaltung des Stoffes anwende.

2) Vorländer, Ber. d. chem. Ges. **40**, 1970, 1907; **41**, 2035, 1908; „Kristallinisch-flüssige Substanzen", Stuttgart 1908.

3) Vorländer, Ber. d. chem. Ges. **43**, 3133, 1910; **43**, 3209, 1913.

4) Vgl. W. Voigt, Wied. Ann. **60**, 368, 1897; E. Riecke, Ann. d. Phys. (4) **3**, 545, 1900; Groth, Einleitung in die chemische Kristallographie, Leipzig 1904; Beckenkamp, Kinetische Kristalltheorie, phys.-med. Ges. Würzburg, 1911.

nisse dürftig sind oder fast gänzlich fehlen. Nach meinen Versuchen muß eine Theorie der flüssigen Kristalle die gleiche molekulare Grundlage haben, wie jede Theorie der festen Kristalle: Die langgestreckten chemischen Moleküle bilden durch Parallelrichtung, Aneinanderreihung und Nebeneinanderstellung Molekülbündel oder Molekülgruppen, die einerseits die polymorphen Verschiedenheiten hervorbringen, anderseits als Kristallkeime oder Kristallelementarteile wirken und schließlich die flüssigen, optisch einachsigen Kristalle erzeugen. Dabei mag wohl der Zusammenhalt der Moleküle in den flüssigen Molekülgruppen bzw. Kristallelementarteilen etwas weniger fest, und die Vereinigung der Molekülgruppen in den flüssigen Kristallen etwas lockerer sein, als bei den festen Stoffen.

Die angebliche Zweiachsigkeit von Kristalltropfen.

Im Gegensatz zu den oben skizzierten Ergebnissen meiner Versuche stehen einige Angaben von O. Lehmann, nach denen „die flüssigen Kristalle des *p*-Azoxyphenetols wahrscheinlich der sphenoidischen Klasse des monoklinen Kristallsystems angehören (Achsenschiefe 60°, Schiefe der Indikatrix 45°)[1]." Dazu wird auf eine Abhandlung in den Annalen der Physik (4) 2, 671, 678 und 696 [1900] hingewiesen. Wenn man nun diese und alle anderen Abhandlungen Lehmanns durchsucht — eine nicht sehr leichte Arbeit —, so findet man eine öftere Wiederholung jener Angabe und zur Begründung das folgende Verhalten von Kristalltropfen des *p*-Azoxyphenetols[2]):

„Der Umstand, daß in allen Fällen ein mehr oder minder dunkles Kreuz parallel den Nicoldiagonalen zu erkennen ist, weist jedenfalls darauf hin, daß die Symmetrie der Moleküle dem monosymmetrischen, nicht dem asymmetrischen System entspricht. Das rhombische System ist ausgeschlossen durch die schiefe Lage der Hauptschwingungsrichtungen gegen die Molekülkanten bei der obersten und untersten Molekülschicht, und optisch einachsige Systeme sind schon deshalb ausgeschlossen, weil sich keine Lage der flüssigen Kristalle auffinden läßt, in welcher dieselben einfach brechend wären."

An einer Stelle (diese Zeitschrift 13, 555, 1912) sagt Lehmann über das Verhalten der Tropfen im Magnetfelde:

„Die Segmente der sehr engen Farbenringe, die man anfänglich in der Nähe des Zentrums in den gelben Sektoren in dem Tropfen beobachtet (Fig. 11), werden mit zunehmender magnetischer Kraft immer weiter, und schließlich erscheint die ganze helle Scheibe in bunten Farben. Wäre, wie D. Vorländer u. a. annehmen, die Substanz optisch einachsig, so müßten die Tropfen nach Aufrichtung der Moleküle dunkel erscheinen, d. h. das schwarze Kreuz müßte sich immer mehr verbreitern, bis es schließlich die ganze Scheibe einnimmt. In Wirklichkeit ist genau das Gegenteil der Fall. Das Kreuz wird immer schmäler, eventuell verdreht wie in Fig. 12, und schließlich ganz unregelmäßig, während die Scheibe selbst hell mit unregelmäßig verteilten bunten Farben leuchtet."

Ein Blick auf die von Lehmann beigegebenen Figuren[1]) läßt erkennen, daß es sich um stark zirkular-polarisierende und pleochroitische Präparate handelt. Lehmann hat das an sich inaktive *p*-Azoxyphenetol durch Zusatz von Kolophonium bzw. Zucker u. a. optisch zirkular infiziert[2]). Die sämtlichen Farberscheinungen und Farbänderungen sind eine Folge von Pleochroismus und Zirkularpolarisation der Präparate; sie haben mit dem monosymmetrischen Kristallsystem und mit den „Molekülkanten" nichts zu tun. Lehmann hat über die Gestalt der Moleküle, obgleich er viel darüber geschrieben und gezeichnet hat, niemals etwas ermittelt. Ebenso sind für die Messung der „Achsenschiefe" und „Schiefe der Indikatrix" nicht die geringsten experimentellen Unterlagen in seinen Arbeiten enthalten. Was von Lehmann als Segmentfärbung der Tropfen beschrieben wird, habe ich an einheitlichen pleochroitischen, flüssigen Kristallplatten im konvergenten, polarisierten Licht beobachtet (diagonale Quadrantenfärbung) und als optisch einachsig nachgewiesen[3]).

Mag auch die Struktur jener Tropfen noch vielfach rätselhaft erscheinen, mit der Einachsigkeit der Kristalle des Azoxyphenetols ist das optische Verhalten der Tropfen wohl vereinbar.

Die angebliche Zweiachsigkeit von flüssigen Kristallplatten.

Im Jahre 1909 hat F. Wallerant eine kurze Mitteilung veröffentlicht „sur les liquides cristallisés biaxes"[4]). Er betrachtet *p*-Azoxyanisol zwischen zwei Glasplatten einmal beim Erhitzen und Schmelzen der festen Kristalle, ein andermal beim Erstarren und Abkühlen der amorphen Schmelze im konvergenten polarisierten Licht. Dann schreibt er über die Achsenbilder:

„Dans le premier cas, on voit des arcs de lemniscates colorées des plus nettes et une branche d'hyperbole, ligne neutre qui traverse le champ quand on peut tourner la préparation; dans la seconde orientation, la normale à la lame est moins inclinée sur l'un des axes optiques dont le pôle est sur le bord du champ et autour duquel tourne

1) O. Lehmann, Die Welt der flüssigen Kristalle, Leipzig 1911, S. 223 und 224; Flüssige Kristalle, Leipzig 1904, S. 60 und 61.

2) Ann. d. Phys. (4) **2**, 671, 1900.

1) Z. B. Ann. d. Phys. **2**, Tafel III und IV, Fig. 5, 8 und 9, 1900.

2) Vgl. Vorländer und Janecke, Zeitschr. f. phys. Chem. **85**, 697, 1913.

3) Zeitschr. f. phys. Chem. **83**, 723, 1913; W. Voigt, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 649, 1912; M. E. Huth, Diss., Halle 1909.

4) Compt. rend. **148**, 1291, 1909.

la ligne neutre. La seule différence constatée entre ces phénomènes et ceux fournis par les corps solides consiste en ce que les lignes neutres sont moins accentuées, ce qui provient d'irrégularités dans l'orientation."

Selten hat mich eine Mitteilung so überrascht wie die vorstehende. Unabhängig von Wallerant hatte ich gleichfalls das *p*-Azoxyanisol für sich und in Mischungen zwischen zwei Glasplatten auf Achsenbilder geprüft[1]) und war zu ganz anderen Resultaten gekommen: reines *p*-Azoxyanisol liefert beim Abkühlen der amorphen Schmelze keine Achsenbilder im flüssig-kristallinischen Zustande weder in dickeren noch in dünneren Platten zwischen Objektträger und Deckglas. Auch die künstliche Aufrichtung der kristallinisch flüssigen Platte durch mechanische Bearbeitung (Schieben, Klopfen, Drücken usw.) gelingt nicht bei dem *p*-Azoxyanisol. Dagegen beobachtet man Achsenbilder bei Präparaten des Azoxyanisols, welche durch Erhitzen während 5 Minuten auf 250° etwas braun gefärbt und zersetzt sind. Auch kann man die flüssigen Kristalle des Azoxyanisols in dünnen Platten (0,1—0,02 mm) durch Zusätze von Säuren u. a. aufrichten und teilweise ordnen[2]); gleichwohl bleiben sie trüb und wegen ihrer großen Dünnflüssigkeit immer etwas ungeordnet. Um die Knickungen flüssiger Kristalle zu studieren, habe ich vielfach andere liquokristalline Substanzen durch Zusatz von Azoxyanisol oder Azoxyphenetol dünner flüssig gemacht. Niemals entsteht eine zweiachsige flüssige Kristallplatte, sondern die an den Azoxyanisol-Präparaten zu beobachtenden Interferenzfiguren von flüssigen Kristallen entsprechen alle den optisch einachsigen Kristallen. Die Versuche sind mit demselben Resultat während der letzten Jahre oft wiederholt worden. Ich habe daher keinen Zweifel, daß die zweiachsigen flüssigen Kristalle des Azoxyanisols Wallerants ebenso in das Bereich der Irrtümer gehören, wie die monoklinen Kristalltropfen Lehmanns. Entweder hat Wallerant statt der flüssigen Kristalle unter dem Polarisationsapparat die feste Phase des Azoxyanisols beobachtet, die mit ihren zweiachsigen schönen Interferenzfiguren leicht zwischen die flüssigen Kristalle gerät — auch flüssige Pseudomorphosen der festen Kristalle sind vorhanden —, oder er hat die zum Teil wenig bekannten Interferenzfiguren von einachsigen Doppelplatten, welche bei vielen flüssigen Kristallen und besonders leicht bei den dünnflüssigen Azoxyanisol-Mischungen auftreten[1]), für optisch zweiachsig gehalten. Die „lignes neutres" und die eigenartigen Formen der durch Knickung der einachsigen flüssigen Kristalle entstehenden Interferenzfiguren können bei Drehung der Präparate und bei unvollständigen Bildern eine Ähnlichkeit mit zweiachsigen Formen aufweisen.

Lehmann hat Beobachtungen über Interferenzfiguren an flüssigen Kristallplatten seiner Präparate im konvergenten polarisierten Licht nicht angestellt. Er behauptet aber unter Hinweis auf die oben zitierte Mitteilung Wallerants, die Platten seien in Wirklichkeit zweiachsig, aus Molekülblättchen zusammengesetzt, deren „Molekülhauptachsen (Blättchenachsen) senkrecht zum Glase stehen, während die Nebenachsen völlig regellos gerichtet sind"[2]). Die Flächen der blättchenförmigen Moleküle sollen sich miteinander und mit der Glasfläche parallel richten, während Parallelrichtung der Kanten nicht stattfindet:

„Vielleicht genügt schon die thermische Bewegung, die Orientierung der Kanten zu einer unregelmäßigen und beständig wechselnden zu machen, während sie nicht zu hindern vermag, daß die Flächen parallel bleiben." „Hierauf weist namentlich eine von Ch. Mauguin (Compt. rend. **154**, 1359, 1912) gemachte Beobachtung über scintillierende Aggregatpolarisation bei pseudoisotropem *p*-Azoxyanisol hin, welches in Wirklichkeit optisch zweiachsig ist"[3]).

Man erkennt, daß diese Betrachtungen über die Natur der von mir als einachsig erwiesenen flüssigen Kristallplatten von Lehmann nur deswegen gemacht werden, um damit die angebliche Zweiachsigkeit des Azoxyanisols und Azoxyphenetols in Übereinstimmung zu bringen. Mauguin führt aber das Azoxyanisol nicht als zweiachsig an, sondern er stellt es in seiner Abhandlung ganz richtig mit den von mir entdeckten Estern als einachsig hin. Irgendwelche experimentelle Begründung für die Molekülblättchen hat Lehmann nicht geliefert. Meine Untersuchungen ergeben keinen Anhalt, daß die Blättchenform der Moleküle für die Entstehung flüssiger Kristalle wesentlich ist. Man kann ja blättchenförmige Moleküle leicht darstellen, deren Teile nach allem, was wir davon wissen, in einer Ebene liegen (Polysubstitutionsprodukte des Benzols). Ich habe gefunden, daß die flüssig-kristallinische Phase regelmäßig verschwindet, sobald die lineare Struktur durch Verzweigung in der Ebene sich

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **61**, 169, 1907; Ber. **41**, 2048, 1908; Vorländer und Hauswaldt, Nova acta, Halle 1909.

2) Zeitschr. f. phys. Chem. **75**, 642, 1911; Däumer, Diss., Halle 1912.

1) Vorländer, Ber. d. chem. Ges. **41**, 2051, 1908; E. Dorn, Ann. d. Phys. (4) **29**, 553, 1909; Vorländer und Hauswaldt, a. a. O.

2) O. Lehmann, Verh. d. Naturwiss. Ver. Karlsruhe, 25. Bd., 1913; diese Zeitschr. **14**, 1130, 1913; Welt d. flüssigen Kristalle, S. 200.

3) Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 417, 1913.

der Blättchenstruktur nähert. Die Entstehung der einachsigen flüssigen Platten kann deshalb nicht in der Weise gedeutet werden, wie es Lehmann getan hat, sondern ich vertrete die Ansicht, daß jene nachweisbar langgestreckten Moleküle und Molekülbündel sich infolge ihrer polaren Beschaffenheit senkrecht auf die Ebene der Unterlage stellen, die aus Glas, Platin, Quarz (amorph, kristallisiert, senkrecht oder schief zur Achse geschnitten) oder auch aus Wasser bestehen kann. Wesentlich ist, daß solche flüssige Kristallplatten auf nur einer Ebene aufliegen und dabei vollständig klar und optisch leer sein können.

Die scintillierende Bewegung von Teilchen hängt mit der Zweiachsigkeit nicht zusammen; sie ist wohl eine Folge von ungleicher Erwärmung und von äußerer Erschütterung der kristallinischen Flüssigkeit. Bei der ultramikroskopischen Betrachtung liegen die Teilchen ganz friedlich da und bewegen sich nicht[1]).

Wenn die Energie der Moleküle imstande wäre, flüssige, optisch zweiachsige Kristallplatten zu bilden, so müßten solche Platten in zahlreichen Fällen beim Aufrichten, Knicken, Fließen und Schieben der Kristalle auch zur Beobachtung gelangen, zumal an dünnflüssigen Platten, deren Kristalle sich ziemlich unabhängig von der Adsorptionskraft der Unterlage entwickeln. Die zweiachsigen Platten erscheinen aber dort nicht. Die flüssigen Kristalle können bis zu Winkeln von 22—45° geknickt[2]) werden, auch schief zur Ebene der Unterlage stehen, und sie bleiben trotzdem einachsig. Wenn sie in Form von langen Blättchen oder Stäbchen parallel der Unterlage in beliebiger Richtung wachsen, so zeigen sie stets grade Auslöschung und keine konoskopischen Interferenzfiguren. Optisch zweiachsige Verzerrungen der einachsigen Kristalle treten natürlich auf bei kapillarer Spannung und Pressung von sehr zähflüssigen Kristallen (kristallinischen Harzen) zwischen Glasplatten, oder sekundär bei flüssigen Kristallen mittlerer Zähigkeit (Cholesterylchlorid, Mischungen von Cholesteryläthylkarbonat mit Cholesterylphenylurethan u. a.) durch senkrechten Schlag oder Stoß auf die einachsige Platte. Eine flüssige Kristallplatte kann in der Wärme, wenn die Kristalle noch dünner flüssig sind, einachsig sein, aber mit zunehmender Zähigkeit durch mechanische Einflüsse beim Erkalten zweiachsig werden. Dickere Platten sind oft einachsig, während dünnere Platten des gleichen Präparats zweiachsig werden.

Daß die optisch einachsigen flüssigen Kristallplatten keinem Kristallsystem angehören oder überhaupt keine Kristalle sein sollen, wie Lehmann meint[1]), weil man unendlich viele Symmetrieebenen durch die Achse legen könne, vermag ich nicht anzuerkennen. Die Lehmannschen Ausdrücke „halbisotrop" oder „halbanisotrop" sind mystisch. Wir haben in den auf ruhendem Wasser sich bildenden, fast klaren Platten von Eis, deren optische Achsen senkrecht zur Wasseroberfläche stehen, das schönste Beispiel aus dem verwandten Gebiete der festen Kristalle; solchen Eisplatten fehlt ebenso wie den flüssigen Kristallplatten eine bestimmte, durch Wachstum oder Spaltbarkeit kenntliche Gestaltung in der Richtung der Nebenachsen. Kristallinisch ist und bleibt das Gebilde, solange es seine Gestalt der molekularen Energie zu verdanken hat. Die Messungen von E. Dorn[2]) haben eine vollständige Übereinstimmung im optischen Verhalten zwischen meinen Präparaten und den festen einachsigen Kristallplatten ergeben; allerdings können daraus Schlüsse bezüglich der Nebenachsen nicht gezogen werden. Unter günstigen Bedingungen bilden sich nach meinen Beobachtungen flüssige Kristalle mit beinahe geraden Kanten und Winkeln von deutlich tetragonalem Habitus[3]).

Charakter der Doppelbrechung; Stäbchen und Blättchen.

Zwischen dem positiven oder negativen Charakter der Doppelbrechung und der Struktur der festen Kristalle sind Beziehungen bisher nicht aufgedeckt worden. Anders liegen die Verhältnisse bei den flüssigen Kristallen. Ich konnte zeigen, daß kristalline optische Aktivität bei flüssigen Kristallen negativen Charakter bedingt, und daß alle anderen flüssigen Kristalle — mögen sie molekular optisch aktiv oder inaktiv sein — optisch positiv sind[4]). Dieses Ergebnis scheint mir für unsere Kenntnis von der kristallinen Struktur der Materie nicht unwesentlich zu sein. Es läßt sich in Zusammenhang

1) Vorländer, Ber. d. chem. Ges. **41**, 2048, 1908; Zeitschr. f. phys. Chem. **85**, 701, 1913; Mauguin, a. a. O.

2) Die Winkel ergeben sich annähernd aus den Interferenzfiguren; Vorländer und Hauswaldt, a. a. O.

1) Ann. d. Phys. (4) 35, 196, 1911; Welt d. flüssigen Kristalle, Leipzig 1911, S. 200.

2) E. Dorn und W. Lohmann, Ann. d. Phys. (4) **29**, 533, 1909; E. Dorn, diese Zeitschr. **11**, 777, 1910; E. Lehmann, Diss., Halle 1910; Baestlein, Diss., Halle 1912; W. Kreide, diese Zeitschr. **14**, 979, 1913.

3) Vorländer, Zeitschr. f. phys. Chem. **57**, 363, 1906 und **61**, 167, 1907.

4) Zeitschr. f. phys. Chem. **61**, 166, 1907; **75**, 641, 1911; **83**, 424; **85**, 691 und 697, 1913; Ber. d. chem. Ges. **41**, 2049, 1908; **43**, 3131, 1910; E. Dorn, diese Zeitschr. **11**, 777, 1910.

bringen mit den Resultaten der Arbeiten von O. Wiener[1]) über lamellare Doppelbrechung und Stäbchendoppelbrechung: bei der lamellaren oder Schichten-Doppelbrechung ist der Charakter der Doppelbrechung nach der Theorie Wieners stets negativ, bei der Stäbchen-Doppelbrechung aber positiv. Nimmt man an, daß die Molekülgruppen und Molekülbündel, welche den kristallinen Charakter der Flüssigkeiten ausmachen, in ihrer Größe sehr klein sind im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts, und daß sie in ihrer Form der Gestalt der langgestreckten, chemischen Moleküle folgen, so würde sich in Übereinstimmung mit meinen chemischen und optischen Untersuchungen die Stäbchen-Form für die Kristallelementarteile aller nicht zirkular polarisierenden flüssigen Kristalle ergeben. Die Molekülgruppen der optisch aktiven flüssigen Kristalle müßten dagegen eine andere Form haben, die mehr einem Scheibchen oder Blättchen ähnelt. Da ein und dieselbe chemische Verbindung bzw. das gleiche chemische Molekül beide Formen zu bilden vermag, in der einen kristallinisch flüssigen Phase inaktive, einachsige Kristalle von positivem Charakter, in der anderen kristallinisch flüssigen Phase aktive einachsige Kristalle von negativem Charakter, so muß man folgern, daß nur die verschiedene Anordnung der chemischen Moleküle in der Molekülgruppe bzw. in dem Kristallelementarteil den Wechsel des optischen Charakters hervorbringt. Es kann nicht ein und dasselbe chemische Molekül im einen Augenblick die Form eines Stäbchens und im nächsten Augenblick die eines Blättchens oder Scheibchens haben. Aber für den Kristallelementarteil ist das wohl möglich. Die Umwandlung der einen in die andere Form verläuft ohne jegliche Änderung in der Lage der Achse der flüssigen Kristallplatte, wie die optische Untersuchung ergibt. Daher ist die Änderung in der Struktur des Kristallelementarteils beim Übergang vom optisch positiven zum negativen Charakter etwa so denkbar, daß sich die lang gestreckten Moleküle unter Bewahrung der aufrechten, zur Ebene der Unterlage senkrechten Achsenstellung schraubengängig und parallel zueinander verschieben; die Kristallelementarteile erhalten die Gestalt einer mit sehr geringer Ganghöhe ansteigenden Schnecke und wirken dadurch optisch als Blättchen. Stäbchen und Blättchen können aus den gleichen, langgestreckten Molekülen zusammengesetzt sein trotz ihrer verschiedenen Form: Die langen Moleküle haben sich im Falle der Stäbchen überwiegend in der Richtung und parallel der Hauptachse aneinander gereiht, so daß das Gebilde optisch einem Rotationsellipsoid mit verhältnismäßig langer Rotationsachse entspricht; im Falle der Blättchen haben sich dieselben Moleküle zwar auch parallel der Hauptachse, aber doch überwiegend in der Richtung der Nebenachsen nebeneinander gestellt, so daß das Gebilde optisch einem Rotationsellipsoid mit verhältnismäßig kurzer Rotationsachse gleichkommt.

Ich habe gefunden, daß die optische Aktivität der flüssigen Kristalle eine Folge ist der optischen Aktivität bzw. der Asymmetrie der Moleküle. Trotzdem können die molekulare Aktivität und die kristalline Aktivität von einer und derselben Substanz ganz verschieden sein, sowohl beim Vergleich der amorphen Flüssigkeit mit den flüssigen Kristallen, als auch beim Vergleich der flüssigen Kristalle verschiedener polymorpher Phasen miteinander. Es gibt Differenzen von etwa 50 bis 10000° zwischen dem molekularen und dem kristallinischen spezif. Drehungsvermögen[1]). Man ersieht daraus, wie notwendig der Unterschied von anisotropen Kristallen und anisotropen Molekülen ist; wenn man beide identifiziert, so wird der große Unterschied im Drehungsvermögen unverständlich. Auch eine Gleichstellung der flüssigen Kristalle mit gepreßten Gläsern, Tonerdefasern[2]) u. a. ist ausgeschlossen: im Gegensatz zu diesen durch äußere Zustandsänderungen anisotrop gestalteten Stoffen, steckt das kristallinische Wesen bei Flüssigkeiten wie bei festen Stoffen in der inneren Struktur und in der Energie der chemischen Moleküle.

1) Diese Zeitschr. **5**, 332, 1904; Leipz. Ber. **61**, Juli 1909.

1) Vorländer, Ber. d. chem. Ges. **41**, 2036, 1908; Zeitschr. f. phys. Chem. **75**, 648, 1911; **85**, 691, 1913; Kasten, Diss., Halle 1909; M. E. Huth, Diss., Halle 1909; Vieth, Diss., Halle 1910; diese Zeitschr. **11**, 526, 1910; **12**, 546, 1911; H. Franke, Diss., Halle 1912; Lenk, Diss., Halle 1913; F. Stumpf, diese Zeitschr. **11**, 780, 1910; Diss., Göttingen 1911.

2) H. Wislicenus und Jost, Koll.-chem. Zeitschr. **2**, 2. Suppl. 9; **6**, 17, 87, 1910; H. Ambronn, ebenda, **6**, 4. Heft, 1910.

(Eingegangen 30. Dezember 1913.)

Die Transformation eines Hochfrequenzstroms auf die dreifache Frequenz.

Von H. Rukop und J. Zenneck.

Vor einiger Zeit hat der eine von uns eine Methode zur Verdreifachung der Frequenz eines Wechselstroms mit Hilfe eines Lichtbogens an-

gegeben[1]). Zweck des folgenden ist die Feststellung des Wirkungsgrads, welchen diese Methode bei einer primären Frequenz von 4000/sec. und 8000/sec. ergibt.

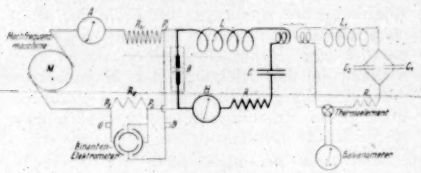


Fig. 1.

1. Die Versuchsanordnung (Fig. 1) war die folgende. Den Strom lieferte eine Hochfrequenzmaschine M des elektrotechnischen Instituts für maximal 10000 Perioden/sec., die von der Compagnie de l'industrie électrique et mécanique in Genf nach den Patenten von Thury gebaut war. Sie gab bei der von uns benutzten Erregung 150 Volt für die Periodenzahl $N = 4000$/sec. und 300 Volt für $N = 8000$/sec. In dem Speisestromkreis lag das Hitzdraht-Amperemeter A und ein induktiver oder Ohmscher Vorschaltwiderstand R_v, außerdem ein praktisch induktionsloser Schniewindt-Widerstand R_s. Der Selbstinduktionskoeffizient von R_s war durch eine Resonanzmethode besonders bestimmt worden und ergab sich so klein, daß die Induktanz auch noch bei der Periodenzahl 8000/sec. kleiner als $^1/_2$ Proz. des Ohmschen Widerstands blieb.

Der Lichtbogen B brannte in einer wassergekühlten Kammer zwischen zwei Homogenkohlen von 20 mm Durchmesser, deren Abstand fein reguliert und von außen abgelesen werden konnte.

Das Binanten-Elektrometer (Zeiger-Binant von der Firma H. Bartels in Göttingen), das zur Leistungsmessung diente, war in der aus Fig. 1 ersichtlichen Weise geschaltet; die in die Zuleitungen zu demselben gelegten Glühlampen G dienten nur als Sicherungen.

Parallel zum Bogen lag der Schwingungskreis, der außer der Selbstinduktion L und der Kapazität C (beide variabel) den ebenfalls variabeln induktionsfreien Widerstand R und das Präzisions-Hitzdraht-Amperemeter H enthielt. Daß die Angaben des letzteren im Bereich der verwendeten Perioden praktisch unabhängig von der Frequenz waren, wurde ausdrücklich kontrolliert.

Der Resonanzkreis C_1 (C_2), L_1, R_1, in dem sich ein Brandessches Thermoelement befand, war mit dem Schwingungskreis CLR ganz lose gekoppelt und konnte entweder auf die Frequenz N der Maschine (C_2 zugeschaltet) oder die Frequenz $3N$ des Schwingungskreises CLR (C_2 abgeschaltet) abgestimmt werden.

2. Die Leistungsmessung[1]).

Die von der Maschine dem Schwingungskreis und Lichtbogen zugeführte Leistung ergibt sich bei der beschriebenen Anordnung aus dem Ausschlag des Binanten-Elektrometers. Bezeichnet $V_2 = J_S \cdot R_s$ (J_S = Speisestrom) die Spannung zwischen den Punkten P_2 und P_3, V_1 diejenige zwischen den Punkten P_1 und P_2, so ist der Ausschlag des Elektrometers

$$\sim \int V_1 V_2 \, dt = \sim \int J_S V_1 \, dt,$$

d. h. $\sim$ der Leistung, die dem Schwingungskreis und Bogen von der Maschine geliefert wird.

Schwierigkeiten macht beim Gebrauch des Binanten-Elektrometers die unvermeidliche Unsymmetrie zwischen den beiden Nadelhälften und den beiden Binanten[2]). Diese hat zur Folge, daß sowohl im Falle $V_1 = 0$ (bzw. $V_2 = 0$) ein Ausschlag zustande kommen kann, der von der Größe von $V_{2\,\mathrm{eff}}$ (bzw. $V_{1\,\mathrm{eff}}$) abhängt, und daß überhaupt der Ausschlag bei demselben $\int V_1 V_2 \, dt$ verschieden wird, je nach den absoluten Werten von $V_{1\,\mathrm{eff}}$ und $V_{2\,\mathrm{eff}}$. Um dadurch entstehende Fehler zu vermeiden, wurde vor allem die Nullstellung der Nadel äußerst sorgfältig so eingestellt, daß die Nadel für $V_2 = 0$ bei Steigerung von $V_{1\,\mathrm{eff}}$ auf 350 Volt keinen Ausschlag zeigte. Dann wurde das Elektrometer mit 50periodigem Wechselstrom geeicht, und zwar für dieselben Spannungen V_1 und V_2, die nachher bei den Hochfrequenzmessungen zur Verwendung kamen. Die Eichkurven (Fig. 2), die man unter diesen Umständen für verschiedene Verhältnisse von $V_{1\,\mathrm{eff}} : V_{2\,\mathrm{eff}}$ bekam, zeigten

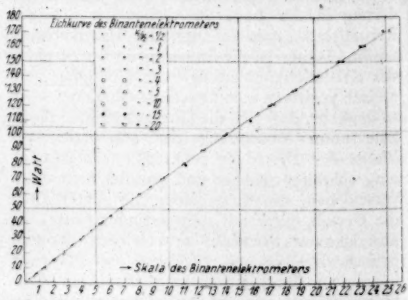


Fig. 2.

1) J. Zenneck, diese Zeitschr. **13**, 955, 1912.

1) Vgl. M. Reich, Jahrb. d. drahtl. Tel. **5**, 176, 1911.
2) Vgl. E. Mayer, diese Zeitschr. **14**, 394, 1913.

Tabelle I.

4000 Perioden/sec. 150 Volt, R_v = Ohmscher Widerstand, $C = 0{,}12\ \mu F$, $L = 1{,}45\ mH$.
Bei Luft: $l = 0{,}6$ mm, $J_S = 2{,}6$ Amp.
Bei Wasserstoff usw.: $l = 0{,}7$ mm, $J = 3{,}4$ Amp.

	$\Re$	1,4	4,4	6,8	9,3	11,8	14,3	17,3	19,8	22,3	24,8	27,3	29,8	40,8	51,8	62,5	80,5
Wirkungsgrad in Proz.	Luft	7,7	18,6	21,8	24,3	26,4	28,4	28,4	27,8	27,2	28,6	29,8	27,8	22,7	19,1	16,4	14,2
	Wasserstoff trocken	6,5	13,8	16,5	19,0	20,3	20,1	20,1	19,9	21,2	20,3	18,8	19,5	17,3	16,0	12,5	12,7
	mit Benzoldampf	6,5	13,8	18,3	20,4	20,4	20,8	20,7	22,0	20,3	20,6	20,4	20,5	17,8	16,3	12,8	12,1
	mit Wasserdampf	6,1	13,1	18,1	19,2	20,8	19,7	19,5	18,0	18,1	17,9	18,3	17,4	15,1	15,4	14,1	11,0

dann allerdings eine nur sehr geringe Abhängigkeit von den Werten der Spannungen $V_{1\,\mathrm{eff}}$ und $V_{2\,\mathrm{eff}}$. Da die Abweichungen zwischen denselben unter ganz extremen Verhältnissen nicht mehr als 2 Proz. betrugen, so wurden die verschiedenen Eichkurven zu einer mittleren Eichkurve, der in Fig. 2 ausgezogenen, vereinigt, und es wurde diese den Messungen tatsächlich zugrunde gelegt.

Die Leistung im Schwingungskreis wurde in der Weise bestimmt, daß der äquivalente Widerstand $\Re$ des ganzen Schwingungskreises (H, R, C, L ohne Lichtbogen) in üblicher Weise[1]) für die benutzten Frequenzen gemessen wurde. Die Leistung im Schwingungskreis ist dann $= \Re J^2_{\mathrm{eff}}$, wenn J_{eff} den im Hitzdrahtinstrument H abgelesenen Strom bedeutet.

Der Strom J enthält nun außer dem eigentlichen transformierten Strom J_3 von der Frequenz $3N$ auch noch eine Komponente J_1 von der Maschinenfrequenz N. Für den Wirkungsgrad der Transformation kommt aber nur in Frage die Leistung $\mathfrak{L}_3$ des Stromes von der Frequenz $3N$ im Verhältnis zu der gesamten von der Maschine an den Schwingungskreis und Lichtbogen abgegebenen Leistung $\mathfrak{L}$. Es ist also die Leistung $\mathfrak{L}_1$ von J_1 von der gesamten Leistung im Schwingungskreis abzutrennen. Zu diesem Zweck wurde in dem Resonanzkreis $L_1 C_1 R_1$ der Stromeffekt (A_1), gemessen einmal wenn der Kreis auf die Frequenz N, und dann (A_3), wenn er auf die Frequenz $3N$ abgestimmt war. Da durch Änderung von R_1 dafür gesorgt wurde, daß der äquivalente Widerstand des Resonanzkreises für die Frequenzen N und $3N$ derselbe war, so bestanden die Beziehungen

$$\frac{9\,A_1}{A_3} = \frac{J_1{}^2{}_{\mathrm{eff}}}{J_3{}^2{}_{\mathrm{eff}}}.$$

Aus der Gesamtleistung des Schwingungskreises $\Re J^2_{\mathrm{eff}} = \Re (J_1{}^2{}_{\mathrm{eff}} + J_3{}^2{}_{\mathrm{eff}})$ ergibt sich also die Leistung $\mathfrak{L}_3$ des Stromes von der Frequenz $3N$ zu

$$\mathfrak{L}_3 = \Re J^2_{\mathrm{eff}} \cdot \frac{A_3}{A_3 + 9A_1}.$$

Der für die Praxis in Betracht kommende Wirkungsgrad ist augenscheinlich das Verhältnis $\mathfrak{L}_3 : \mathfrak{L}$; dieses ist in den folgenden Tabellen (mit Ausnahme der Vorversuche) als Wirkungsgrad η angegeben. Besser als durch diesen Wirkungsgrad würde die Fähigkeit des Bogens zur Erregung eines Stromes von der Frequenz $3N$ charakterisiert werden durch das Verhältnis $\frac{\mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L} - \mathfrak{L}_1}$, bei dem also von der Gesamtleistung die Leistung des untransformierten Maschinenstromes, der in dem Zweige CLR fließt, in Abzug gebracht ist.

3. Vorversuche. Einfluß der Lichtbogenatmosphäre.

Vor allem wurde untersucht, wie sich der Bogen in verschiedenen Atmosphären verhält, und es wurde zu diesem Zweck durch die Lichtbogenkammer außer Luft auch noch Wasserstoff (käuflicher Bombenwasserstoff), der durch Schwefelsäure getrocknet war, ferner solcher, der durch Benzol, und endlich solcher, der durch Wasser geströmt war, hindurch geleitet. Außerdem wurde der Bogen in die vorher mit Luft ausgespülte Kammer eingeschlossen (im folgenden als „eingeschlossener Bogen" bezeichnet).

Dabei zeigte sich folgendes:

a) Der Wirkungsgrad war für alle Belastungen des Schwingungskreises am größten beim eingeschlossenen Bogen; die Wasserstoffatmosphäre war noch am günstigsten, wenn sie mit Benzol gemischt war [vgl. Tabelle I[1]), in welcher überall die günstigste Bogenlänge und Speisestromstärke benutzt war[2])].

1) Vgl. z. B. J. Zenneck, Lehrb. d. drahtl. Tel., II. Aufl., S. 142. — $\Re$ ist im folgenden stets in Ohm angegeben.

1) In Tabelle I und II ist $\mathfrak{L}_1$ noch nicht abgetrennt. Der „Wirkungsgrad" ist also in diesen Tabellen $= \frac{\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3}{\mathfrak{L}}$.

2) Wenn man einige Zeit mit einer Atmosphäre von Wasserstoff, der durch Benzol geleitet war, gearbeitet und nun die Kammer mit Luft ausgespült hatte, stieg der Wirkungsgrad für kurze Zeit erheblich an, z. B. bei Kreis 4 (Tabelle VII) bei einer Belastung von 25 Ohm auf ca. 47 Proz., um nach kurzer Zeit auf den in Tabelle VII angegebenen normalen Wert zurückzugehen. Es liegt nahe

Tabelle II.

4000 Perioden/sec., 150 Volt, R_v = Ohmscher Widerstand, Luft. $C = 0{,}12\ \mu F$, $L = 1{,}45\ mH$, $\Re = 14{,}8$.

l	J_S	η Proz.	l	J_S	η Proz.	l	J_S	η Proz.
0.8 mm	3,9	18,9	0,6 mm	4,0	17,6	0,4 mm	4,0	18,2
0.8 „	3,6	18,2	0,6 „	3,6	19,7	0,4 „	3,6	17,9
0.8 „	3,2	21,8	0,6 „	3,2	22,2	0,4 „	3,2	20,8
0.8 „	2,8	23,0	0,6 „	2,8	24,8	0,4 „	2,8	22,2
			0,6 „	2,4	24,8	0,4 „	2,4	22,8
						0,4 „	2,0	25,0

4000 Perioden/sec., Luft. $C = 0{,}066\ \mu F$, $L = 2{,}65\ mH$, $\Re = 16{,}6$.

l	J_S	η Proz.
0,4 mm	4,0	14,8
0,4 „	3,6	17,0
0,4 „	3,2	19,0
0,4 „	2,8	21,6
0,4 „	2,4	21,3
0,4 „	2 0	22,7
0,4 „	1,6	24,3

4000 Per., R_v = Ohmscher Widerstand, $C = 0{,}12\ \mu F$, $\Re = 14{,}8$, Wasserstoff rein.

l	J_S	η Proz.	l	J_S	η Proz.
0.5 mm	3,8	18,4	1,0 mm	4,8	20,7
0.5 „	3,4	17,6	1,0 „	4,4	17,6
0.5 „	3,0	18,3	1,0 „	4,2	18,7
0.3 „	4,0	15,4	1,0 „	3,8	18,8
0.3 „	3,6	16,9	1,0 „	3,5	21,2
0.3 „	3,2	16,2			
0.3 „	2,8	16,5			

4000 Perioden/sec., 150 Volt, R_v = Ohmscher Widerstand, Wasserstoff mit Benzol. $C = 0{,}12\ \mu F$, $L = 1{,}45\ mH$, $\Re = 19{,}8$.

l	J_S	η Proz.	l	J_S	η Proz.
0,8 mm	3,6	22,4	0,6 mm	4,0	21,5
0,8 „	3,3	21,6	0,6 „	3,6	20,9
0,8 „	3,0	22,8	0,6 „	3,2	21,8
0,8 „	2,8	22,4	0,6 „	2,8	21,4

8000 Perioden/sec., 300 Volt, R_v = Ohmscher Widerstand. Wasserstoff mit Benzol. $C = 0{,}033\ \mu F$, $L = 1{,}32\ mH$, $\Re = 31{,}6$.

l	J_S	η Proz.	l	J_S	η Proz.	l	J_S	η Proz.	l	J_S	η Proz.
1.0 mm	2,0	2,7	0,8 mm	2,0	2,0	0,6 mm	2,0	5,3	0,4 mm	2,0	4,1
1.0 „	1,4	ink.	0,8 „	1,6	3,3	0,6 „	1,6	9,5	0,4 „	1,6	11,2
1.0 „	1,2	19,2	0,8 „	1,4	8,1	0,6 „	1,4	12,2	0,4 „	1,2	14,4
1.0 „	1.0	27,2	0,8 „	1,2	18,4	0,6 „	1.2	17.8	0,4 „	1,0	26,6
1.0 „	0,8	30,4	0,8 „	1,0	29,3	0.6 „	1,0	31,0			

b) Während der Wirkungsgrad bei eingeschlossenem Bogen mit Erhöhung des Speisestroms stets stark abfällt, war er bei Wasserstoff, der durch Benzol geleitet war, für die Frequenz 4000/sec. von der Stärke des Speisestroms nur wenig abhängig. Bei der Frequenz 8000/sec. trat der Einfluß der Speisestromstärke in ähnlicher Weise wie bei Luft hervor (vgl. Tabelle II).

c) Die Schwingungen waren bei Bogen in Wasserstoff mit Benzol viel weniger stabil als bei eingeschlossenem Bogen. Ebenso war die Stabilität des Lichtbogens bei den zur Verfügung stehenden Spannungen für die Wasserstoffatmosphäre auf ein viel engeres Gebiet von Bogenlänge und Speisestromstärke beschränkt, als für den eingeschlossenen Bogen.

Auf Grund dieser Erfahrungen wurden die weiteren Versuche mit dem eingeschlossenen Bogen gemacht.

anzunehmen, daß der samtartige Überzug, der sich beim Arbeiten in Benzoldampf auf den Kohlen zeigt, dabei eine Rolle spielt.

4. Versuche mit dem eingeschlossenen Bogen. Frequenz des Primärstromes 4000/sec.

a) In Tabelle III sind die Resultate für drei verschiedene Schwingungskreise bei Ohmschem Widerstand R_v in der Speiseleitung zusammengestellt. Der Speisestrom war in allen drei Fällen so gewählt, daß der Wirkungsgrad einen maximalen Wert bekam. Die Zahlen für alle drei Kreise zeigen, daß für eine bestimmte Belastung des Schwingungskreises ein Maximum des Wirkungsgrades existiert.

Dieses Maximum fällt im Gebiet der verwendeten Kapazitäten um so günstiger aus, je größer die Kapazität im Schwingungskreise ist.

b) Für praktische Zwecke kann natürlich nur induktiver Vorschaltwiderstand in der Speiseleitung in Frage kommen. Eine Verbesserung des Wirkungsgrades nach der bisherigen Festsetzung, bei der der Energieverbrauch in der Speiseleitung nicht in Betracht gezogen ist, — etwa infolge Änderung der Schwingungsform — wird durch Verwendung von induktivem statt

Tabelle III.

$C = 0{,}066\ \mu F$, $L = 2{,}65\ m H$, 4000 Perioden/sec., 150 Volt, $R_v =$ Ohmscher Widerstand, $l = 0{,}6$ mm, $J_S = 2{,}0$ Amp., Luft.

$\Re$	9,1	11,6	14,1	16,6	19,1	22,1	24,6	27,1	30,3	32,8	35,3	37,8	48,8	59,8	69,8
$\mathfrak{L}$	78	84	86	86	88	87	88	88	88	88	88	86	86	84	84
$\mathfrak{L}_2$	17,3	18,7	21,3	20,5	19,5	20,9	19,6	17,9	19,0	17,3	17,2	16,2	8,4	7,9	5,6
$\mathfrak{L}_1$	0,7	0,9	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,1	1,1	1,2	1,0	1,6	2,0
η Proz.	22,1	22,3	24,8	23,8	22,2	24	22,3	20,3	21,6	19,7	19,6	18,8	9,8	9,4	6,7

$C = 0{,}12\ \mu F$, $L = 1{,}45\ m H$, 4000 Perioden/sec., 150 Volt, $R_v =$ Ohmscher Widerstand, $l = 0{,}6$ mm, $J_S = 2{,}2$ Amp., Luft.

$\Re$	1,4	4,3	6,8	9,3	11,8	14,8	17,3	19,8	22,3	24,8	27,3	29,8	40,8	51,8	62,5	80,5
$\mathfrak{L}$	66	68	80	84	88	88	88	89	92	90	88	87	88	85	82	82
$\mathfrak{L}_2$	4,9	12 2	17,5	19,3	21,8	23,3	23,2	22,9	23,2	23,9	24,1	21,9	18	13,5	10,2	8
$\mathfrak{L}_1$	0,2	0,5	0,9	1,1	1,4	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	2,1	2,3	2,0	2,7	3,0	3 6
η Proz.	7,4	17,9	21,9	23,0	24,8	26,5	26,4	25,7	25,2	26,6	27,3	25,2	20,5	15,8	12,4	9,7

$C = 0{,}22\ \mu F$, $L = 0{,}80\ m H$, 4000 Perioden/sec., 150 Volt, $R_v =$ Ohmscher Widerstand, $l = 0{,}6$ mm, $J_S = 2{,}2$ Amp., Luft.

$\Re$	1,0	3,5	6,4	8,9	11,4	14,4	16,9	19,4	21,4	24,4	26,4	29,4	40,4	52,1	62,1	80,1
$\mathfrak{L}$	72	76	86	88	88	90	91	93	94	90	90	90	90	86	84	85
$\mathfrak{L}_2$	4,0	13,1	18,0	21,4	24,1	26,6	26,9	25,1	25,3	24,2	24,1	20,2	15,2	11,9	6,9	4,9
$\mathfrak{L}_1$	0,2	0,7	1,4	1,9	2,2	2,4	2,6	2,9	3,2	3,3	3,5	3,5	4,6	5,6	4	5,5
η Proz.	5,5	17,2	21,0	24,3	27,3	29,5	29,5	27,0	27,0	26,8	26,7	22,4	17,7	14,2	8,1	5,8

Ohmschem Widerstand unter sonst gleichen Umständen nicht erreicht (vgl. z. B. Tabelle IV);

Tabelle IV.

4000 Perioden/sec., 150 Volt, $C = 0{,}22\ \mu F$, $L = 0{,}80\ m H$, $l = 0{,}6$ mm, Luft, $J_S = 2{,}2$ Amp.

1. Ohmscher, 2. induktiver Widerstand.

	Ohmscher Widerstand			Induktiver Widerstand		
$\Re$	14.4	19,4	24,4	14,4	19,4	24.4
$\mathfrak{L}$	75	78	78	79	82	83
$\mathfrak{L}_2$	20,3	21,7	21,6	19,5	20	19
$\mathfrak{L}_1$	1,9	2,6	2,8	2,7	3,5	3.5
η Proz.	27,1	27.8	27,6	24,7	24,3	22,8

der Wirkungsgrad wurde sogar etwas verschlechtert. Die große Bedeutung des induktiven Vorschaltwiderstands liegt aber darin, daß die Konstanz erheblich größer ist, und insbesondere darin, daß die Bogenlänge und die Speisestromstärke in ein Gebiet getrieben werden kann, das einen viel günstigeren Wirkungsgrad liefert, aber bei Ohmschen Vorschaltwiderstand wegen Unstabilität des Bogens nicht zugänglich ist.

Wie der Wirkungsgrad von der Bogenlänge und dem Speisestrom abhängt, zeigen die Kurven von Fig. 3. Wie sehr der Wirkungsgrad bei dem Schwingungskreis mit der größten Kapazität durch Verwendung von induktivem Vor-

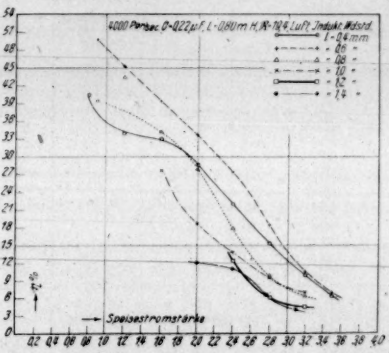


Fig. 3.

schaltwiderstand und dadurch ermöglichtem kleinem Speisestrom gesteigert wurde, ist aus Tabelle V zu entnehmen.

Tabelle V.

4000 Perioden/sec., 150 Volt, $C = 0{,}22\ \mu F$, $L = 0{,}80\ m H$, R_v = induktiver Widerstand, $l = 0{,}6$ mm, $J_S = 1{,}2$ Amp.

$\Re$	1.4	3.9	6,4	8,9	11.4	14,4	16,9	19,4	21,9	24,4	26,9	29,4	40,4	51,4	61,4	79,4
ϱ	40	40	40	40	43	50	52	54	56	60	64	64	60	60	60	61
ϱ_2	2,0	5,4	8,5	10,9	13,1	16,1	18,2	18,8	20,6	23,2	23,8	25,3	22,9	19,9	18,1	5
ϱ_1	0,3	0,8	1,3	1,9	2,5	3,3	3,8	4,2	4,9	5,3	5,9	6,4	8,4	9,8	10,2	10,4
η Proz.	5,0	13,5	21,3	27,2	30,5	32,2	35	34,8	36,8	38,7	37,2	39,6	38,2	33,2	30,2	8,3

Dasselbe mit $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 1{,}0$ Amp.

$\Re$	14,4	19,4	24,4	29,4	40,4
ϱ	45	50	50	50	51
ϱ_2	13,8	17,7	21,1	23,1	24,9
ϱ_1	3,6	4,0	5,4	6,3	8,3
η Proz.	30,6	35,4	42,2	46,2	48,7

Bei höherer Belastung des Schwingungskreises löschte der Bogen.

5. Versuche mit eingeschlossenem Bogen. Frequenz des Primärstromes 8000/sec. Von den für diese Frequenz verwendeten Schwingungskreisen besaß Kreis 1 eine Kapazität von 0,033 μF (Flintglas) und 2,2 Ohm äquivalentem Widerstand[1])
„ 2 „ „ „ 0,066 „ „ „ 1,5 „ „ „
„ 3 „ „ „ 0,1 „ (Glimmer) „ 1,0 „ „ „
„ 4 „ „ „ 0,2 „ „ „ 1,2 „ „ „

a) Die Abhängigkeit des Wirkungsgrads von der Bogenlänge und der Speisestromstärke ergab sich hier von derselben Art wie bei der Frequenz 4000/sec.: man erhielt eine Steigerung des Wirkungsgrades mit abnehmendem Speisestrom und im allgemeinen auch mit Verkleinerung der Bogenlänge (Fig. 4 und 5).

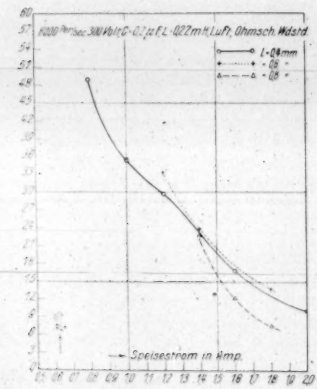


Fig. 4.

b) Bei Ohmschem Widerstand in der Speiseleitung wiederholte sich ferner die schon bei 4000 Perioden/sec. gemachte Beobachtung, daß der größte Wirkungsgrad bei dem Kreis mit der größten Kapazität erzielt wurde. Die darauf bezüglichen Zahlen sind der Tabelle VI bzw. Fig. 6 zu entnehmen. Der rasche Abfall des

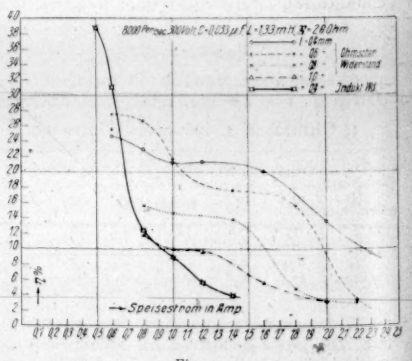


Fig. 5.

Wirkungsgrades bei den Kreisen 1, 3 und 4 bei Überschreitung eines Widerstandes von ca. 40 Ohm erklärt sich tatsächlich durch einen Übergang der stabilen Schwingungsform in eine wenig stabile.

c) Wesentlich anders liegen die Verhältnisse

1) Ohne R (Fig. 1) und den Widerstand des Hitzdrahtinstruments H.

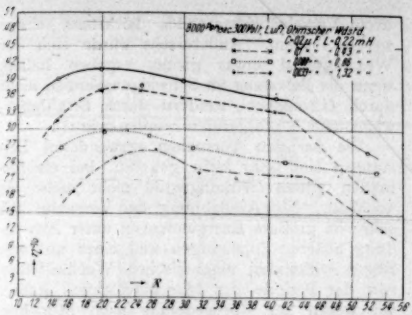


Fig. 6.

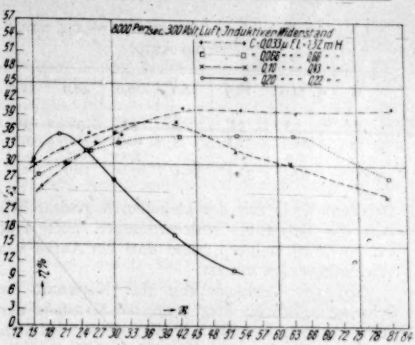


Fig. 7.

Tabelle VI.

8000 Perioden/sec., 300 Volt, R_v = Ohmscher Widerstand.

$C = 0{,}033\ \mu F$, $L = 1{,}32\ m H$, $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 0{,}9$ Amp.

$\Re$	16,6	21,6	26,6	31,6	42,6	53,6
$\mathfrak{L}$	28	28	29	31	32	34
$\mathfrak{L}_3$	5,3	6,95	7,7	6,9	7,0	4,1
$\mathfrak{L}_1$	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,7
η Proz.	18,9	24,8	26,5	22,2	21,8	12,0

$C = 0{,}066\ \mu F$, $L = 0{,}66\ m H$, $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 0{,}9$ Amp.

$\Re$	15,2	20,2	25,9	30,9	41,9	52,9
$\mathfrak{L}$	30	31	33	34	35	33
$\mathfrak{L}_3$	8,0	9,1	9,5	9,1	8,5	7,4
$\mathfrak{L}_1$	0,8	0,8	1,1	1,3	1,6	1,9
η Proz.	26,7	29,3	28,8	26,7	24,3	22,4

$C = 0{,}1\ \mu F$, $L = 0{,}43\ m H$, $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 0{,}9$ Amp.

$\Re$	14,7	19,7	24,7	29,9	40,7	51,7
$\mathfrak{L}$	30	32	34	37	36	36
$\mathfrak{L}_3$	9,4	11,8	12,55	13,3	12,0	6,9
$\mathfrak{L}_1$	1,0	1,4	1,75	2,2	2,7	3,1
η Proz.	31,4	36,9	36,9	35,8	33,3	19,1

$C = 0{,}2\ \mu F$, $L = 0{,}22\ m H$, $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 0{,}9$ Amp.

$\Re$	14,9	19,9	24,9	29,9	40,9	51,9
$\mathfrak{L}$	33	36	38	38	35	35
$\mathfrak{L}_3$	12,9	14,7	14,4	14,7	12,5	9,1
$\mathfrak{L}_1$	5,0	6,8	7,6	8,5	8,5	8,9
η Proz.	39,1	40,8	37,8	38,7	35,7	26

bei induktivem Vorschaltwiderstand in der Speiseleitung, wie Tabelle VII und Fig. 7 zeigen[1]).

1) Die in den Figuren 6 und 7 bzw. den Tabellen VI und VII angegebenen Wirkungsgrade lassen sich zum Teil für kleine Belastungen noch um mehrere Prozent erhöhen, indem zu jeder Belastung die günstigste Bogenlänge und Speisestromstärke sorgfältigst ausprobiert wird. Bei Aufnahme der Messungsserien war Bogenlänge und Speisestrom so gewählt worden, daß man die ganze Serie unter konstanten Bedingungen aufnehmen und die Schwingungen mehrere Stunden lang stabil halten konnte.

Hier sind die maximal erreichbaren Wirkungsgrade bei den vier Kreisen nur wenig verschieden, aber der Wirkungsgrad fiel bei Steigerung der Belastung um so weniger ab, je kleiner die Kapazität war.

Tabelle VII.

8000 Perioden/sec., 300 Volt, R_v = induktiver Widerstand.

$C = 0{,}033\ \mu F$, $L = 1{,}32\ m H$. $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 0{,}5$ Amp.

$\Re$	16,6	21,6	26,6	31,6	42,6	53,6	63,6	81,6
$\mathfrak{L}$	14	15	16	17	18	20,5	21	20,5
$\mathfrak{L}_3$	3,6	4,5	5,44	6,01	7,3	8,27	8,35	8,4
$\mathfrak{L}_1$	0,2	0,3	0,3	0,4	0,6	0,7	0,9	1,0
η Proz.	25,7	30	33,9	35,3	40,5	40,2	39,7	40,9

$C = 0{,}066\ \mu F$, $L = 0{,}66\ m H$, $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 0{,}5$ Amp.

$\Re$	15,9	20,9	25,9	30,9	41,9	52,9	62,9	80,9
$\mathfrak{L}$	16	19	20	21	22	22,5	22,5	22,5
$\mathfrak{L}_3$	4,5	5,7	6,45	7,1	7,7	8,0	8,0	6,20
$\mathfrak{L}_1$	0,85	1,1	1,25	1,6	2,0	2,3	2,6	3,2
η Proz.	28,0	30,0	32,3	33,8	35,0	35,5	35,4	27,5

$C = 0{,}1\ \mu F$, $L = 0{,}43\ m H$, $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 0{,}6$ Amp.

$\Re$	15,4	20,4	25,4	30,4	41,4	52,4	62,4	80,4
$\mathfrak{L}$	20	22	23	25	25	25	25	24
$\mathfrak{L}_3$	5,95	7,3	8,25	8,95	9,5	8,1	7,6	5,8
$\mathfrak{L}_1$	1,0	1,3	1,5	2,0	2,6	3,0	3,4	4,0
η Proz.	29,8	32,7	35,8	35,8	38,0	32,4	30,5	24,1

$C = 0{,}2\ \mu F$, $L = 0{,}22\ m H$, $l = 0{,}4$ mm, $J_S = 0{,}9$ Amp.

$\Re$	14,9	19,9	24,9	29,9	40,9	51,9
ϱ	38	37	38	37	36	36
ϱ_3	11,6	13,1	12,3	10,0	6,1	3,7
ϱ_1	4,5	5,3	7,0	8,2	8,7	9,5
η Proz.	30,5	35,4	32,4	27,0	16,9	10,2

Bei dem Kreis mit der kleinsten Kapazität ließ sich die Belastung außerordentlich hoch (auf ca. 80 Ohm) steigern, ohne daß ein Abfall des Wirkungsgrades eintrat.

Mit der Verkleinerung der Kapazität im Schwingungskreise stieg auch die Konstanz der Schwingungen in hohem Maße; sie war bei dem Kreis 1 mit der kleinsten Kapazität so ausgezeichnet, wie man sie beim Arbeiten mit dem Lichtbogen nur selten antrifft.

c) Tatsächlich lagen die Verhältnisse bei dem Kreis 1 so, daß das System: Induktiver Vorschaltwiderstand R_v — Selbstinduktion L — Kapazität C nahezu in Resonanz war mit der Frequenz der Maschine. Es ist im höchsten Grade wahrscheinlich, daß die günstigen Verhältnisse dieses Kreises eine Folge dieses Resonanzfalles waren, daß also die Realisierung dieses Resonanzfalles anzustreben ist.

Zu bedenken ist aber, daß in diesem Falle bei einem Ausgehen des Bogens der Strom und die Spannung weit über den normalen Wert ansteigen können. Es sind also Vorkehrungen zu treffen, welche die Maschine, die Kondensatoren und Meßinstrumente dagegen sichern. Bei der niederen Spannung, welche die Maschine für die Frequenz 4000 sec. gab, kam bei den Versuchen ein Ausgehen des Bogens doch gelegentlich vor, so daß wir mit Rücksicht auf die Maschine bei dieser Frequenz es nicht wagten, diesen Resonanzfall zu realisieren.

6. Zusammenfassung. Bei den Versuchen wurde der Einfluß der Bogenatmosphäre, der Bogenlänge, der Speisestromstärke, der Kapazität und der Belastung des Schwingungskreises untersucht. Als günstigster Fall ergab sich bei einem Bogen, der in eine ursprünglich mit Luft gefüllte Kammer eingeschlossen war, und bei induktivem Vorschaltwiderstand in der Speiseleitung für eine primäre Periodenzahl von 4000 sec. ein Wirkungsgrad von ca. 49 Proz., für eine primäre Frequenz von 8000 sec. ein Wirkungsgrad von ca. 41 Proz.

Der Wirkungsgrad würde sich etwas kleiner ergeben haben, wenn bei Berechnung desselben die Verluste in dem induktiven Vorschaltwiderstand der Speiseleitung mit berücksichtigt worden wären; doch beträgt der Unterschied bei einigermaßen verständigem Bau dieses induktiven Vorschaltwiderstandes höchstens einige wenige Prozent. Andererseits würde sich der Wirkungsgrad etwas größer ergeben haben, wenn die Belastung im Schwingungskreise nicht durch Ohmschen, sondern durch Strahlungswiderstand hervorgerufen worden wäre[1]).

Die bei den Versuchen verwendeten Leistungen sind sehr klein gewesen, bei einigermaßen gutem Wirkungsgrad nicht mehr als 50 Watt. Die Ausdehnung der Versuche auf sehr viel größere Energiemengen unter Anwendung höherer Spannungen und eines auf den Bogen wirkenden magnetischen Wechselfeldes von der Periode des Maschinenstroms haben wir wegen der Übersiedelung nach München aufgeben müssen. Diese Versuche sollen aber hier, sobald die nötigen Apparate beschafft sind, in Angriff genommen werden. — —

Für die Überlassung der Hochfrequenzmaschine und anderer Apparate sind wir dem Direktor des Elektrotechnischen Instituts der Technischen Hochschule Danzig, Herrn Professor Dr. Roeßler, zu großem Danke verpflichtet, den wir ihm auch an dieser Stelle aussprechen möchten.

1) Bei demselben Verhältnis $\mathfrak{J}_{3\,\mathrm{eff}} : \mathfrak{J}_{1\,\mathrm{eff}}$ würde dann $\varrho_3 : \varrho_1$ günstiger als bei Ohmschen Widerstand.

München, Dezember 1913.

(Eingegangen 24. Dezember 1913.)

Eine kalorimetrische Meßanordnung.

Von E. Bompiani und G. Rümelin.

1. Der Zweck dieser vorläufigen Mitteilung ist der Nachweis, daß man bei kalorimetrischen Messungen Widerstandsthermometer nicht nur dann vorteilhaft anwendet, wenn es sich um Erzielung der höchsten erreichbaren Meßgenauigkeit handelt[1]), wobei schwer zu behandelnde Instrumente nicht zu umgehen sind; bei Anwendung von Drehspulgalvanometern normaler Empfindlichkeit und *Pt*-Thermometern z. B. in der von der Firma Heraeus für technische Zwecke angefertigten Form lassen sich bereits Meßgenauigkeiten erzielen, die die mit *Hg*-Thermometern erreichbare übertreffen. Zu Untersuchungen über Reaktionswärmen bei Temperaturen, die von der Zimmertemperatur abweichen, ist vor einiger Zeit im hiesigen Institut[2]) eine Kalorimeteranordnung konstruiert und benutzt worden. Im folgenden soll eine viel einfachere, bequem zu bedienende Vorrichtung, die demselben Zweck

1) Jaeger und v. Steinwehr, Ann. d. Phys. 21, 23, 1906.

2) E. Bose, Gött. Nachr. 1906, 278.

dient, beschrieben werden, welche der früheren Anordnung wohl überlegen ist.

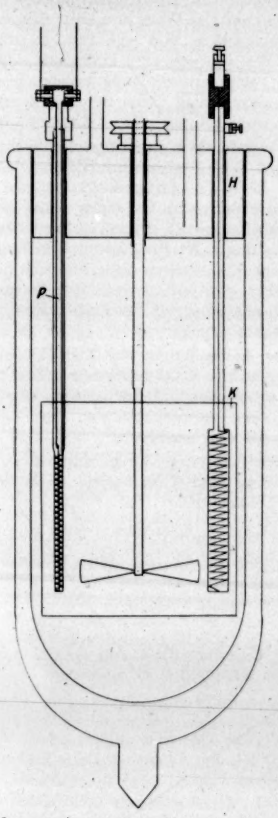


Fig. 1.

2. Das Kalorimetergefäß K (siehe Fig. 1) von etwa 1 Liter Kapazität ruht auf Korkschneiden im Innern eines großen zylindrischen Dewargefäßes. Damit die in dasselbe eintauchenden Teile (Rührer, Pipetten, Heizspule zur Bestimmung der Wärmekapazität) keine Wärme durch Leitung fortnehmen, ist der Raum über dem Kalorimetergefäß durch einen in die Öffnung des Dewargefäßes eingepaßten „Heizkork" H verschlossen, ein Kasten aus Messing, durch den Wasser hindurchströmt. Die eintauchenden Teile sind durch Röhren, die in den Heizkork eingesetzt sind, mit thermischem Kontakt hindurchgeführt. Die Temperatur des durch den Heizkork fließenden Wassers muß ganz wenig (1—2° C) höher als die des Kalorimeters einreguliert werden, um den Temperaturgang des letzteren infolge der Strahlung in für die Messungen ausreichendem Maße herabzudrücken. Die Zirkulation des Wassers durch den Heizkork bewirkt eine Prytzsche Schlauchpumpe, die Regulierung der Temperatur erfolgt durch elektrische Heizung. Als Rührer wurde vorläufig ein Turbinenrührer benutzt.

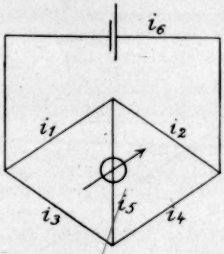


Fig. 2.

Der Widerstand des Pt-Thermometers P wurde in der Wheatstoneschen Brücke gemessen. Zwei Zweige der Brückenanordnung werden durch einen Stöpselrheostaten von Siemens & Halske gebildet; der vierte Widerstand, mit dem die Nullstellung bei Änderung der Temperatur rasch nachzustellen ist, besteht aus einem Präzisionskurbelrheostaten derselben Firma.

Während eines Versuchs ging der Meßstrom dauernd durch die Brückenanordnung; es wurde nicht kommutiert, um das Galvanometer in kurzen Intervallen ablesen zu können.

3. Benutzen wir die in vorstehendem Schema (Fig. 2) gebrauchten Bezeichnungen. Es ist allgemein:

$$\frac{i_5}{i_6} = \frac{w_1 w_4 - w_2 w_3}{w_5(w_1+w_2+w_3+w_4)+(w_1+w_3)(w_2+w_4)}$$

w_1 sei der Thermometerwiderstand, also variabel. Es ist ferner

$$\frac{\partial (i_5/i_6)}{\partial w_1} = \frac{(w_2+w_4)\{w_5(w_3+w_4)+w_3(w_2+w_4)\}}{\{w_5(w_1+w_2+w_3+w_4)+(w_1+w_3)(w_2+w_4)\}^2}.$$

In der Nähe der Nullstelle der Brücke ist, wenn das Übersetzungsverhältnis p durch $w_3 = pw_1$ und $w_4 = pw_2$ eingeführt wird,

$$\frac{\partial (i_5/i_6)}{\partial w_1} = \frac{p}{p+1}\,\frac{w_2}{w_5(w_1+w_2)+w_1 w_2(1+p)}.$$

Bei einer Änderung von w_1 ändert sich natür

lich auch der Hauptstrom i_6, der durch die Verzweigung fließt. Bei geringen Änderungen der Temperatur, die wir bei der Empfindlichkeitsbetrachtung voraussetzen, können wir diese Änderung vernachlässigen. Ist E die Empfindlichkeit des verwendeten Galvanometers in Skalenteilen / Amp., a der Ausschlag, also $da = E\,di_5$, so wird mit dieser Vernachlässigung

$$\frac{\partial a}{\partial w_1} = E \cdot i_6 \frac{p}{p+1} \frac{w_2}{w_5(w_1+w_2)+w_1w_2(1+p)}.$$

Man findet ebenso

$$\frac{\partial a}{\partial w_3} = -\frac{1}{p}\frac{\partial a}{\partial w_1}.$$

Führt man die Temperatur ϑ durch

$$w_1 = w_0\,(1+\alpha\vartheta+\beta\vartheta^2)$$

ein, so ergibt sich die Temperaturempfindlichkeit der Anordnung zu

$$\frac{\partial a}{\partial \vartheta} = E\,i_6 \frac{p}{p+1} \frac{w_2\,w_0(\alpha+2\beta\vartheta)}{w_5(w_1+w_2)+w_1w_2(1+p)}.$$

4. Folgende Zahlenangaben mögen die von uns gewählten Versuchsbedingungen veranschaulichen:

$w_0 = 50{,}00$ Ohm,	$w_2 = 56{,}00$ Ohm,
$\alpha = 3{,}927 \cdot 10^{-3}$,	$w_5 = 10000$ „
$\beta = -6{,}18 \cdot 10^{-7}$,	$p = 178{,}4$,
$\vartheta = 45^0$	$i_6 = 0{,}04$ Amp.

$1/E = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ Amp./mm bei 2200 mm Skalenabstand.

Hieraus ergibt sich, übereinstimmend mit der beobachteten Empfindlichkeit

$$\frac{\partial a}{\partial \vartheta} = 700\ \text{mm}/^0\text{C}; \quad -\frac{\partial a}{\partial w_3} = 22\ \text{mm/Ohm}.$$

Es folgen die bei einem beliebig herausgegriffenen Versuch gemachten Ablesungen; es wurden durch elektrische Heizung 98,8 cal. bei 45° Kalorimetertemperatur entwickelt, das Galvanometer in Intervallen von 30 Sekunden vor und nach der Zufuhr elektrischer Energie in der Nähe der Nullstelle abgelesen; zwischen der letzten Ablesung der Vorperiode und der ersten der Nachperiode liegen 4 Minuten:

Vorperiode $w_3 = 10587{,}0$ Ohm	Nachperiode $w_3 = 10590{,}4$ Ohm
502,5	502,5
3,0	3,0
2,5	3,0
3,0	3,0
2,6	2,5
2,7	2,0
2,8	1,3
3,0	0,9
3,1	0,3
3,0	499,9
	9,3
	8,7

Nullpunkt bei 500,0.

Durch Ausgleichung der Beobachtungen findet man für die Zunahme des Galvanometerausschlags + 0,11 und die Gangkorrektion + 1,61 mm. w_3 wurde um 3,40 Ohm vermehrt; dies entspricht einem Ausschlag von 74,8 mm, so daß der wegen Wärmeaustauschs korrigierte, der korrigierten Temperaturerhöhung entsprechende Galvanometerausschlag 76,6 mm wird, der eine Temperaturerhöhung von 0,1098° C bedeutet.

Es ergibt sich aus der Betrachtung der Zahlen, daß 1° Temperaturerhöhung des Kalorimeters über die Temperatur, bei der es im Wärmegleichgewicht ist, einen Gang von etwa 0,01°/min hervorruft. Beim Wärmegleichgewicht, das sich durch Nachregulieren der Temperatur des Heizkorks erhalten läßt, läßt sich der Gang noch sehr viel kleiner machen; beispielsweise änderte sich bei 77° C im Kalorimeter die Temperatur um weniger als 0,01° in 12 Minuten.

Über Anwendungen der hier skizzierten Anordnung soll a. a. O. berichtet werden; die Versuche mußten aus äußeren Gründen abgebrochen werden, ehe es möglich war, eine Reihe von Messungen durchzuführen.

Herrn Geheimrat Voigt danken wir für die Beschaffung und Überlassung wertvoller elektrischer Hilfsmittel.

Göttingen, Dezember 1913.

(Eingegangen 21. Dezember 1913.)

Die Eigenschaften von Selenblöcken. (The Properties of Selenium Blocks.)

Von A. M. Tyndall und G. W. White.

Man hat allgemein angenommen, daß sich die Wirkung des Lichtes bei der Änderung des elektrischen Widerstandes des Selens durch die Änderung des spezifischen Widerstandes in der kleinen Schicht erklären lasse, in welche das Licht an der belichteten Oberfläche eindringt. Das heißt: Bei Selenzellen erster Art, bei denen der Widerstand in einer zur Richtung des Lichtes senkrechten Richtung gemessen wird, besteht die Wirkung des Lichtes darin, den Widerstand des einen von zwei parallelen Leitern zu verändern, und bei Zellen zweiter Art, bei denen man den Widerstand in der Richtung der Belichtung mißt, besteht die Wirkung des Lichtes darin, den Widerstand des einen von zwei hintereinander geschalteten Leitern zu verändern. Man hat daher vermutet, daß zur Herstellung einer merklich empfindlichen Zelle zweiter Art die Dicke der Selenschicht in der Richtung des Lichtes außerordentlich klein sein müsse, so wie bei den Zellen

wie sie Uljanin[1]) und Fritts[2]) verfertigt haben. Bei Versuchen mit derartigen Zellen fanden wir, daß die vorgenannte Bedingung nicht notwendig war, denn die Widerstandsänderung bei der Belichtung war selbst dann merklich, wenn die Schichtdicke mehrere Millimeter betrug. In einer kupfernen Form ließen wir Selenwürfel kristallisieren. Durch Anpressen von Elektroden aus feinem Kupferdrahtnetz oder aus Glasplatten mit einem halbdurchsichtigen Platinniederschlag konnte jeder Würfel als Zelle beider Arten benutzt werden. Bei Verwendung desselben Selenpräparats und Belichtung derselben Fläche ließen sich dann die beiden Arten miteinander vergleichen. Wir hofften, auf Grund dieser Vergleichung die „wirksame Eindringungstiefe des Lichtes im Selen" ermitteln zu können.

Die Widerstandsänderung bei der Belichtung war in allen Fällen viel größer, wenn der Block als Zelle zweiter Art benutzt wurde, und es ergab sich für die „wirksame Tiefe" ein unmöglicher Wert. [Dies steht im Gegensatz zu den theoretischen Entwicklungen von Sperling[3]).] Beispielsweise war bei einem Selenwürfel von 1 cm Kantenlänge zwischen Elektroden aus Kupferdrahtnetz die Widerstandsänderung in einer zur Belichtung senkrechten Richtung 3,6 v. H., während die Änderung in der Richtung der Belichtung 18,2 v. H. betrug. Der Einfluß des Drahtnetzes auf die Lichtstärke wurde kompensiert.

Die unerwartete Erscheinung, die sich hier zeigte, war eine hochempfindliche Zelle zweiter Art, und die Wirkung des Lichtes auf die beiden Arten ließ sich nicht durch die Änderung des spezifischen Widerstandes innerhalb einer dünnen Schicht an der belichteten Oberfläche erklären.

Wir haben nachgewiesen, daß sich die Wirkung des Lichtes nicht auf eine beträchtliche Tiefe im Selen übertrug. Mit Rücksicht auf die hohe Empfindlichkeit dicker Zellen zweiter Art, die zuweilen 40 v. H. überstieg, muß ein großer Teil des Widerstandes zwischen den Elektroden an den Elektroden selbst belegen sein. Die nachgenannten Eigenschaften von Selenblöcken lassen vermuten, daß dieser Widerstand die Form eines Übergangswiderstandes annimmt.

1. Wir ließen einen Würfel kristallisieren und feilten die Fläche, die in Berührung mit der einen Elektrode war, sorgfältig. Die ersten paar Feilstriche verursachten eine gewaltige Zunahme des scheinbaren Widerstandes, und fortgesetztes Feilen ergab eine allmähliche Änderung. Der Block war durchweg leitend und lichtempfindlich.

1) Uljanin, Wied. Ann. **34**, 241, 1888.
2) Fritts, Proc. Amer. Assoc. 1884.
3) Sperling, Beiträge zur Kenntnis der Selenzellen. Göttingen 1908.

2. Der scheinbare Widerstand von Blöcken war in sehr hohem Maße von der Natur der Elektroden abhängig. Ein Würfel hatte zwischen Stanniolelektroden einen Dunkelwiderstand von 46000 Ohm. Als die Elektroden durch solche aus Kupferfolie ersetzt wurden, wurde der Widerstand 88000 Ohm, und mit Elektroden aus Kupferdrahtnetz wurde der Widerstand 157000 Ohm. Diese Tatsache kann in der Änderung des „Übergangswiderstandes" ihre Erklärung finden.

3. Der Widerstand zwischen zwei Flächen und die Lichtempfindlichkeit einer Fläche waren davon abhängig, welche Oberfläche während der Kristallisierung mit dem Selen in Berührung war.

4. Die Blöcke zeigten die üblichen charakteristischen Eigenschaften der Selenzellen, wie die Abhängigkeit des Widerstandes von der angelegten Spannung, von der Stromrichtung und von dem Drucke der Elektroden, und es ist bezeichnend, daß alle diese Eigenschaften bei „Kristallkontakten" ihr Ebenbild haben. Hierauf hat zuerst Brown[1]) hingewiesen. Bemerkenswert ist ferner, daß Streintz[2]) die vorstehenden Eigenschaften von „Kristallen" durch das Vorhandensein eines hohen Widerstandes an der Berührungsstelle mit der Elektrode erklärt hat.

Bei Belichtung verschiedener Teile einer Zelle erster Art, die aus zwei auf Glas befestigten parallelen Drähten bestand, welche durch Selen verbunden waren, ergab sich, daß das Licht einen verhältnismäßig starken Einfluß an den Elektroden hatte.

Hiernach scheint es, daß bei allen Selenzellen die Wirkung des Lichtes zum großen Teile, aber nicht ganz und gar, darin besteht, eine Widerstandsänderung an den Berührungsstellen der Elektroden mit dem Selen herbeizuführen.

Die ausführlichere Arbeit werden wir demnächst a. a. O. veröffentlichen.

1) Brown, Phys. Rev. 1913, S. 245.
2) Streintz, diese Zeitschr. **12**, 845, 1911.

Universität Bristol.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 5. Dezember 1913.)

Die Messung der Niederschlagselektrizität durch das Galvanometer[1]).

Von Friedrich Herath.

Von Elster und Geitel[2]) wurde schon gegen Ende der achtziger Jahre des verflossenen

1) Auszug aus der gleichnamigen Inaugural-Dissertation.
2) Elster und Geitel, Met. Zeitschr. **5**, 95—100 und Wien. Ber., Kl. 2a, 421—450, 1890.

Jahrhunderts eine einwandfreie Versuchsanordnung zur Messung der Niederschlagselektrizität geschaffen, die dann durch Gerdien[1]), Kähler[2]), Benndorf[3]), Simpson[4]) und Baldit[5]) im Prinzip beibehalten und lediglich technisch vervollkommnet wurde.

Diese in den Hauptpunkten gut übereinstimmenden Beobachtungen ergaben Konvektionsströme, die für Landregen von der Größenordnung 10^{-16} bis 10^{-14} Amp/cm²-Auffangfläche waren, für Gewitterregen und Böen bis 10^{-12} stiegen.

Bei Vergrößerung der Auffangfläche — in unserem Falle bis 25 m² — mußte man daher zu Strömen gelangen, die durch das Galvanometer bequem meßbar sind. Eine größere Präzision der absoluten Werte und eine bessere Ermittlung der Momentanwerte ließ sich hierdurch erwarten.

Wenn zugleich eine automatische Registrierung der Ströme und eine ebensolche der Niederschlagsintensität vorgesehen wurde, so konnte durch fortlaufende Beobachtungen noch die Tropfengröße als drittes Element hinzugenommen werden.

Dieser Anregung von Herrn Geheimrat Prof. Dr. L. Weber entsprechend, habe ich die folgenden Messungen ausgeführt.

Versuchsanordnung.

1. Niederschlagselektrizität.

Auf dem genügend freien Flachdache des Magnetischen Observatoriums zu Kiel wurde eine 25 m² große Auffangfläche aus dünnem Gewebe isoliert aufgehangen. Von hier führte ein Kabel durch ein im Kellergeschoß aufgestelltes Galvanometer zu einer guten Erdung. Fallen nun Niederschläge, so geben sie ihre Ladung an die Auffangfläche ab, von wo sie durch Kabel und Galvanometer, das einen entsprechenden Ausschlag zeigt, zur Erde abfließt.

Zur Verminderung der mit einer starren, etwa aus Blech bestehenden Auffangfläche verknüpften mechanischen und Isolationsschwierigkeiten wurde die Auffangfläche aus leichtem, feinmaschigem Zeug hergestellt, ringsum eine Flaggenleine eingenäht und das Ganze mittels S-Haken an 6 Standpunkten ausgespannt.

Von besonderer Wichtigkeit war es natürlich, die Befestigung der Auffangfläche zugleich tadellos isoliert zu gestalten. Die zu diesem Zwecke einzuschaltenden Isolatoren wurden, gestützt auf die Erfahrungen von Elster und Geitel[1]), H. Schering[2]) und A. Gockel[3]), folgendermaßen hergestellt:

In einen an seiner Mantelfläche mit Nuten versehenen Hartgummizylinder A (Fig. 1) sind Ringe eingedreht, durch deren starke Köpfe B_1

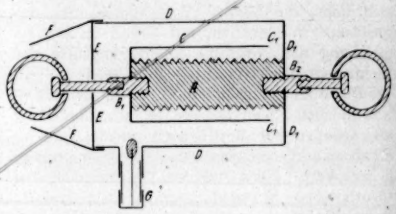


Fig. 1.

und B_2 die Metallzylinder C und D angepreßt werden. Letzterer ist durch den Deckel E, der B_1 frei hindurchragen läßt, abgeschlossen.

Um ein Auftreffen von Niederschlägen auf diese Öffnung zu verhindern, wodurch die isolierende Wirkung des Hartgummistabes ausgeschaltet würde, ist an den Deckel E noch der Schutzmantel F angesetzt. Ferner ist in den äußeren Metallzylinder D noch der Rohrstutzen G eingelötet, durch den metallisches Natrium als Trocknung der im Isolator abgeschlossenen Luft eingeführt werden kann.

Die so isolierte Auffangfläche steht durch eine blanke Golddrahtlitze in leitender Verbindung mit dem nach dem Galvanometer führenden Kabel. Zur Verhinderung einer Überleitung auf den Bleimantel ist das Ende des letzteren mit folgender Isoliervorrichtung versehen:

Der Kupferdraht des Kabels B (siehe Fig. 2) wurde mit dem starken Messingdraht M verlötet und Isolierschicht und Bleimantel so vom Kabel abgelöst, daß erstere ca. 1 cm über den Bleimantel hervorragte. Dann wurde über das Kabel der Korkstopfen K_1 geschoben, auf den der Glaszylinder G_1 aufgesetzt war. Hierauf wurde Paraffin P eingegossen, in dasselbe noch der kleinere Glaszylinder G_2 eingesetzt und

1) H. Gerdien, Münch. Ber., math.-nat. Kl. **33**, 367—379, 1903; diese Zeitschr. **4**, 837—842, 1903; Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik **1**, 24—39, 1904.

2) Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Met. Inst. zu Potsdam Nr. 213; K. Kähler, Ergebn. d. Registr. d. Niederschl.-Elektr. zu Potsdam im Jahre 1908; diese Zeitschr. **9**, 258, 1908; Met. Zeitschr. **27**, 326—330, 1910.

3) H. Benndorf, Wiener Ber., Kl. 2a, 94—98, 1910.

4) G. C. Simpson, Proc. Roy. Soc. of London, Ser. A, 82, 1909; diese Zeitschr. **11**, 408, 1910.

5) M. Baldit, Le Radium, 153, 1911.

1) Elster und Geitel, diese Zeitschr. **3**, 305—310 (306), 1902.

2) H. Schering, Inaug.-Diss. Göttingen, 1904; diese Zeitschr. **5**, 451—452, 1904.

3) A. Gockel, diese Zeitschr. **6**, 328—329, 1905.

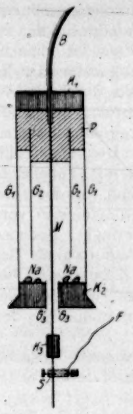


Fig. 2.

schließlich G_1 und G_2 noch mit einer Paraffinschicht überzogen. An dem noch offenen Ende von G_1 kann der Korken K_2 mit metallischem Natrium als Trockenmittel so eingeschoben werden, daß der Messingstab M durch die in der Mitte befindliche Öffnung noch frei hindurchragen kann. Um nun den dadurch geschaffenen Raum, solange keine Messungen vorgenommen werden, völlig von der Außenluft abzuschließen, wird jedesmal nach Beendigung der Beobachtungen der Korken K_3 in die mit dem Glasrohr G_3 verkleidete Öffnung geschoben. Endlich finden wir am Messingstab M noch die Klemmschraube S, durch die mittels der Golddrahtlitze F die metallische Verbindung mit der Auffangfläche hergestellt ist.

Das Kabel führt nun zu dem im Registrierraum aufgestellten Drehspulengalvanometer (System Deprez-d'Arsonval, Siemens-Halske). Endlich waren Galvanometer und Erde durch einen Kupferdraht leitend verbunden. Die Galvanometerausschläge (Empfindlichkeit: 1 mm Ausschlag bei 1 m Skalenabstand $= 8 \times 10^{-10}$ Amp.) wurden mit dem Töpferschen Registrierapparat photographisch aufgezeichnet, wobei sich der Streifen in der Sekunde um 0,079 mm fortbewegte.

Es erübrigt noch, hervorzuheben, daß Versuche angestellt wurden, die ergaben, daß durch die bei vorstehender Anordnung event. in Betracht kommenden Fehlerquellen (mangelhafte Isolation, Lenard-Effekt, Influenzwirkungen) die Resultate nicht gefälscht werden.

2. Niederschlagsintensität.

Um die Beziehungen zwischen Niederschlagselektrizität und Niederschlagsstärke aufzudecken, mußten auch kleine zeitliche Änderungen der letzteren registriert werden.

Als Auffanggefäß diente ein dem Hellmannschen Stationsregenmesser ähnlicher Zinkblechtrichter mit einer oberen Öffnung von 192 mm. Derselbe ist, um auch nichtflüssige Niederschläge nach unserer Methode messen zu können, doppelwandig. Sobald nun derartige Niederschläge zu erwarten waren, wurde in den dadurch geschaffenen Hohlraum Wasser von 5° C eingefüllt, das bei seiner hohen Wärmekapazität ausreicht, um die während der Zeit einer Messung (1 Stunde) in den Trichter gefallenen Eiskristalle zum Schmelzen zu bringen, ohne daß man infolge der geringen Wärmedifferenz zwischen Auffanggefäß und umgebender Luft fürchten mußte, daß die Resultate durch Verdunstung merklich gefälscht würden.

Das Ausflußrohr des Auffangtrichters führt in einen wetterfesten Holzkasten und ist ähnlich wie bei Gallenkamp[1]) mittels eines Gummischlauches mit dem S-förmigen Abtropfrohr verbunden. Der hier abfallende Tropfen trifft einen kleinen Glaszylinder, der an einem Wagebalken mit Gegengewicht befestigt ist, drückt diesen nieder und schließt dadurch so lange einen elektrischen Stromkreis, bis er in einen weiteren Trichter abfällt, durch den er den Holzkasten wieder verläßt.

Die Registrierung erfolgte auf dem gleichen Streifen aus lichtempfindlichem Negativpapier, auf dem sich die Niederschlagselektrizität aufzeichnete, und zwar wurde an den Rand derselben das Bild einer Einfadenlampe als vertikale, ca. 1 cm lange Gerade markiert.

Bei einem Durchmesser der oberen Öffnung des Auffangtrichters von 192 mm und bei einem Gewicht der vom Abtropfrohr abfallenden Tropfen von 0,124 g entspricht 1 Tropfen einer Regenhöhe von 0,00428 mm. Man ersieht aus diesen Werten, daß bei diesem Regenmesser sich schon geringe Intensitätsänderungen bemerkbar machen müssen.

Um aber auch sehr ergiebigen Niederschlägen gerecht werden zu können, kann die Aufsaugfläche durch Aufsetzen einer Blende verkleinert werden. Zwei solcher Blenden stehen zur Verfügung, bei deren Verwendung ein vom Ausflußrohr abfallender Tropfen einer Niederschlagshöhe von 0,0112 bzw. 0,0175 mm entspricht.

3. Tropfengröße.

Die Messungen der Größe der Regentropfen

1) W. Gallenkamp, Met. Zeitschr. **22**, 1—10, 1905.

wurden nach der von J. Wiesner[1]) ausgearbeiteten und von A. Defant[2]) verbesserten Absorptionsmethode vorgenommen.

Ergebnisse der Beobachtungen.

1. Tropfengröße.

Unter diesem Titel sollen die Ergebnisse der Beobachtungen der Tropfengröße für sich allein, also ohne eventuelle Beziehung zu den anderen Messungselementen betrachtet werden.

Mit Ausnahme eines Nebelrieselns, bei dem das Gewicht eines Tropfens 0,024 mg nicht überschritt, kann man alle Messungen mit „Landregen" bezeichnen, d. h. es waren Regenfälle, die mehrere Stunden andauernd über größeres Gebiet sich erstreckten und aus einer meist gleichmäßigen Wolkendecke fielen.

Teilt man Defant folgend die Tropfen in Gruppen, in denen immer die Tropfen von kleinerem Gewichtsunterschied als 0,025 mg zusammengefaßt werden, so findet man, daß die Höchstzahl der Tropfen auf die Gruppe 0,000 bis 0,024 mg Gewicht entfällt, d. h. bei vorliegenden Messungen befinden sich die kleinsten Tropfen den größeren gegenüber in bedeutender Überzahl. Überhaupt nimmt im allgemeinen die Tropfenzahl mit wachsendem Radius ab. Damit im Widerspruch stehen die Messungen Defants, bei dem die Höchstzahl der Tropfen auf die Gruppe von 0,025—0,074 mg Gewicht trifft. Doch läßt sich dies folgendermaßen erklären: Während vorliegende Messungen in den Wintermonaten (13. November 1912 bis 11. März 1913) vorgenommen wurden, beobachtete Defant lediglich im Sommerhalbjahr. Infolge der während dieser letzteren Zeit erfolgenden starken Bestrahlung der Erdoberfläche durch die Sonne wird diese stark erwärmt. Auch die Temperatur der unteren Schichten der Atmosphäre nimmt zu und es bilden sich daher oft aufsteigende Luftströme von bedeutender Geschwindigkeit. Wie nun Lenard[3]) feststellt, genügt für Tropfen bis zu 0,5 mm Durchmesser eine Geschwindigkeit von 3,5 m/sec für die Vertikalkomponente, um dieselben schwebend zu erhalten, ein Wert, der bei 1 mm Durchmesser auf 4 m/sec und bei 2 mm auf 5,9 m/sec steigt. Vergleichen wir endlich in der Defantschen Abhandlung Tabelle II, die die Verteilung der Tropfengröße für „ruhige Regen" wiedergibt, mit Tabelle III, in der die Guß- und Gewitterregen zusammengestellt sind, so finden wir, daß auch hier wieder bei den turbulenten Regen sich das Verhältnis der kleinen zu den großen Tropfen sehr zugunsten der letzteren geändert hat, was ebenfalls durch die Wirkung der aufsteigenden Luftströme, die ja bei Gewittern leicht 8 m/sec Aufstieggeschwindigkeit erreichen, Erklärung findet. Den augenfälligsten Beweis für diese Ansicht liefert Tabelle III der Lenardschen Abhandlung, in der sowohl Winter- wie Sommerbeobachtungen sich vorfinden. Für die Monate mit geringer Bodenerwärmung, also schwacher Vertikalluftströme liegt auch hier das Maximum der Tropfenzahl bei der kleinsten Größenklasse und wandert dann bei den Messungen an Sommertagen zu den nächsthöheren Gruppen vor.

Noch eine weitere Tatsache läßt sich aus dem vorhandenen Material ablesen. Vergleicht man nämlich die Verteilung der Tropfengrößen mit den zur Zeit des Niederschlags herrschenden Windverhältnissen, so ergeben sich folgende Beziehungen:

Bei Regen mit dem Prädikat „Windstille", wodurch zum Ausdruck gebracht werden soll, daß nur eine minimale Luftbewegung vorhanden war, erreichen die Tropfen ein Höchstgewicht von 0,823 mg. Mit wachsender Windstärke nimmt die Zahl der großen Tropfen zu; doch findet sich nicht, wie man vielleicht vermuten möchte, mit dem Prädikat „Sturm" das Maximum. Diesem begegnet man vielmehr da, wo eine sonst gleichmäßige Luftbewegung durch Böen unterbrochen wird. Auch für diese Erscheinung findet sich eine Erklärung. In den Wirbeln der Böen nämlich werden die einzelnen Tropfen mit solcher Wucht aneinander geschleudert, daß die Oberflächenspannung und andere einer Vereinigung entgegenwirkende Kräfte dagegen nicht in Betracht kommen und Verschmelzung zweier oder mehrerer Tropfen erfolgt. Solche Wirbel entstehen natürlich auch dort, wo Luftmassen, die infolge ungleicher Erwärmung verschiedene Aufstieggeschwindigkeiten besitzen, aneinander stoßen. Dieser Umstand muß auch bei der vorher diskutierten Frage über die veränderte Lage des Maximums der Tropfenzahl bei Sommer- und Winterbeobachtungen mit in Rechnung gezogen werden, wenngleich hier die Wirbel nur eine untergeordnete Rolle spielen dürften.

Endlich stellt A. Defant als Hauptresultat seiner Abhandlung den Satz auf: Es verhalten sich die Gewichte der am häufigsten vorkommenden Tropfen zueinander wie 1:2:3:4:6:8:16 usw., wobei die Hauptmaxima im Verhältnis 1:2:4:8 stehen.

Dieser Satz, der aus der von ihm aufge-

1) J. Wiesner, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. math.-nat. Kl., Abt. I, 1397—1434, 1895.

2) A. Defant, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. math.-nat. Kl. 2a, **114**, 585—646, 1905. Referat: Met. Zeitschr. **22**, 321—324, 1905.

3) Ph. Lenard, Über Regen. Met. Zeitschr. **21**, 248—262, 1904.

stellten Tabelle unmittelbar abzulesen ist, findet durch vorliegende Messungen keineswegs Bestätigung; denn es finden sich die Häufigkeitsmaxima weder bei allen Regen bei denselben Größengruppen, noch läßt die Summe aller Beobachtungen eine derartige Schlußfolgerung zu.

2. Regenelektrizität.

Auf Grund der in 30 Beobachtungsreihen vorgenommenen Registrierungen und der Messung von 25000 einzelnen Tropfengrößen lassen sich folgende Sätze aufstellen:

1. Regentropfen können sowohl positive wie negative Ladung besitzen.

2. Der durch die Niederschläge erzeugte positive Konvektionsstrom pro cm^2 Horizontalauffangfläche ist bei Landregen meist von der Größenordnung 10^{-15} Amp. und greift nur selten in die nächsthöhere bzw. -tiefere über.

3. Die Maximalwerte der negativen Ströme erreichen nie die der positiven, auch greifen sie nie in die Größenordnung 10^{-14} Amp./cm^2 über.

4. Die Zahl der Messungen mit einerlei (positivem) Vorzeichen ist gegenüber den Messungen mit Zeichenwechsel im Überschuß.

5. Bei ruhigen Landregen ist die Ladung fast immer positiv. Oftmalige Zeichenwechsel der Regenelektrizität treten nur gleichzeitig mit Böen auf.

6. Der Übergang vom positiven zum negativen Zeichen ist immer mit einem momentanen Nachlassen der Regenstärke verbunden.

Die in 5. und 6. aufgestellten Befunde könnte man vielleicht durch folgende Überlegung erklären:

Keine Bedenken dürften sich wohl gegen die Annahme einer dichten Schar gegen die Erdoberfläche positiv geladener Tropfen in einer Höhe von 1000 bis 2000 m über dem Erdboden erheben. Tritt nun plötzlich ein starker Windstoß auf, so kann derselbe, wie oben dargetan wurde, mehrere Tropfen zur Vereinigung zwingen. Hierbei wird es nun nicht selten vorkommen, daß neu entstandene Tropfen, da mit wachsendem Radius die Oberflächenspannung abnimmt, bei zunehmender Fallgeschwindigkeit sehr bald zerreißen. Hierbei wird infolge der Influenzwirkung des Potentialgefälles der große Tropfen positive Ladung erhalten, während die kleinen von ihm am oberen Ende abspringenden Tröpfchen negativ elektrisch werden. Der große positiv elektrische Tropfen gelangt natürlich rascher zur Erde, als der kleine negativ geladene. Erstere verursachen eine bedeutende Regenintensität und positiven Galvanometerausschlag. Alsdann gelangen auch die kleinen negativen Tropfen zur Erde, wodurch die Aufzeichnung des Nachlassens der Niederschlagsstärke und der negative Elektrizitätswert ihre Erklärung finden.

7. Die von den Niederschlägen herabgebrachten positiven Elektrizitätsmengen sind in bedeutendem Überschuß gegenüber den negativen, und zwar ist die Zahl der positiven Einheiten 15 mal größer als die der negativen.

8. Ganz entsprechende Verhältnisse finden wir bei der Verteilung der Zeit, in der positiver, negativer und ungeladener Regen fiel. Unter der Bezeichnung „keine Ladung" ist natürlich nur zu verstehen, daß kein Ausschlag des Galvanometers aus der Registrierkurve ersichtlich war, daß es sich also während dieser Zeit nur um Ströme handelte, die kleiner als $0{,}5 \times 10^{-15}$ Amp./cm^2 waren. Diese Fälle traten nur äußerst selten ein.

Insgesamt wurde während 45697 Sekunden positiv geladener Regen beobachtet, während 3479 negativer und während 1353 Sekunden ungeladener Regen. Positiver Regen fiel demnach 13 mal so lang wie negativ geladener.

9. Positiv elektrischer Regen enthält in der Regel in der Gewichtseinheit mehr Ladung als negativer. So kann bei positiver Ladung das cm^3 Wasser von 0,1 bis 6 El.-St.-Einheiten enthalten, während die Werte bei negativem Vorzeichen nur zwischen 0,1 und 0,6 El.-St.-E./cm^3 schwanken.

Leider war der Winter 1912/13 in Kiel sehr arm an Schneefällen. Die wenigen Registrierungen gestatten aber keine Schlußfolgerungen von größerer Allgemeinheit.

Weidenberg b. Bayreuth, Dezember 1913.

(Eingegangen 10. Dezember 1913.)

Feststellung einer Priorität in der Gravitationstheorie.

Von G. Jaumann.

In der Diskussion zu dem Einsteinschen Vortrage über das Gravitationsproblem bei der Naturforscherversammlung in Wien, welche mir erst durch die Publikation in dieser Zeitschr. **14**, 1262, 1913, näher bekannt wurde, bemerkt Herr Mie, vielleicht ohne mich angreifen zu wollen, aber in symptomatischer Weise, er halte

es für notwendig, daß es gesagt werde, daß Abraham der erste gewesen ist, der einigermaßen vernünftige Gleichungen für die Gravitation aufgestellt hat.

Hierzu möchte ich bemerken, daß ich acht Monate vor der ersten Publikation Abrahams[1]) eine Gravitationstheorie publiziert habe, welche die Gravitationserscheinungen durch eine sehr einfache differentielle Nahewirkungsgleichung beschreibt, welche organisch eingefügt ist in das System von differentiellen Nahewirkungsgleichungen, durch welches ich den größten Teil der physikalischen und einen kleinen Teil der chemischen Erscheinungen auf Grund der Voraussetzung der Kontinuität der Materie und der undulatorischen Natur aller Strahlenarten ohne jede zusätzliche Voraussetzung oder nachträgliche Annahme dargestellt habe.

Die Unterschätzung und das Schweigen, womit alle meine experimentellen und theoretischen Arbeiten seit mehr als 20 Jahren übergangen werden, konnte ich mir erklären durch die allgemeine Überschätzung der Korpuskular- bzw. Elektronentheorien, welche meiner Ansicht nach lediglich verdienstvolle Arbeitshypothesen sind. Aber wenn man von einigermaßen „vernünftigen" Theorien spricht, darf meine Theorie nicht vergessen werden, ja sie ist von diesem Gesichtspunkte ganz zweifellos die erste, welche den Anspruch hat, beachtet zu werden, liegen doch gegen alle Relativitätstheorien, so elegant sie sich mathematisch präsentieren, vom Standpunkt der physikalischen „Vernunft" auch bei allergrößter Vorurteilslosigkeit schwere Bedenken vor.

Der Grundgedanke meiner Gravitationstheorie ist, daß die Poissonsche Differentialgleichung das Rudiment einer physikalischen Nahewirkungsgleichung ist und durch Hinzufügen der Fluxion einer physikalischen Variablen, und zwar der totalen Fluxion erster Ordnung des Gravitationspotentials selbst zu einem physikalischen Nahewirkungsgesetze, welches also auch die zeitliche Fortpflanzung der Gravitationswirkungen darstellt, vervollständigt werden muß.

Dieser fundamentale Gedanke lag vor meiner Publikation den Physikern ebenso fern, als er nach meiner Publikation denselben naheliegt. Die Abrahamsche Theorie wurde direkt hierdurch angeregt, „psychologisch" natürlich. Die Abrahamsche Gleichung entsteht nämlich aus der Poissonschen Gleichung durch Hinzufügen einer Fluxion des Gravitationspotentials, allerdings der partiellen Fluxion zweiter Ordnung.

In allen anderen Beziehungen besteht zwischen meiner Theorie und der Abrahamschen Theorie nicht die geringste Verwandtschaft. Meine Gravitationstheorie hat beträchtliche Erfolge durch Eröffnung von durch Beobachtungen kontrollierbaren Erklärungsmöglichkeiten für alle von den Astronomen konstatierten oder wahrscheinlich gemachten anomalen Gravitationserscheinungen aufzuweisen[1]). Die relativistischen Gravitationstheorien bieten nichts, was die Astronomen brauchen könnten.

Brünn, 18. Dezember 1913.

(Eingegangen 20. Dezember 1913.)

1) Jaumann, Wiener Ber. **120**, 436 ff., März 1911; Abraham, diese Zeitschr. **13**, 1, Dezember 1911.

1) Vgl. die ausführliche Mitteilung Wien. Ber. **121**, 95, Januar 1912, referiert Beibl. **37**, 260, 1913.

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 85. NATURFORSCHERVERSAMMLUNG ZU WIEN.

Charles G. Barkla (Edinburg): Charakteristische Röntgenstrahlungen.

Substanzen, welche von Röntgenstrahlen durchsetzt werden, emittieren dreierlei sekundäre Strahlungen. Eine dieser Strahlungen ist ähnlich der primären und besteht aus der zerstreuten Röntgenstrahlung; eine zweite ist ebenfalls eine Röntgenstrahlung, aber in ihrer Beschaffenheit sehr verschieden von derjenigen der primären; die dritte endlich ist eine Strahlung schnell bewegter Elektronen, ähnlich derjenigen der β-Strahlen radioaktiver Substanzen. — Diese Mitteilung beschäftigt sich mit der zweiten Art von Strahlungen.

1. Die Strahlung ist eine homogene Strahlung, deren Absorbierbarkeit für das besondere sie emittierende Element charakteristisch ist. Weder eine Änderung in der Absorbierbarkeit, noch in der Intensität der primären Strahlung beeinflußt die Qualität dieser sekundären Strahlung, und bei einer Untersuchung vermittels sukzessiver Absorptionen findet man, daß sie aus Strahlen von nur einer Durchdringungsfähigkeit besteht — im Gegensatz zu der heterogenen primären Strahlung. Eine chemische Verbindung des ausstrahlenden Elements mit anderen Elementen scheint die Qualität der emittierten Strahlung nicht zu beeinflussen;

die Strahlung wird also nicht von Valenzelektronen ausgesandt. Diese Tatsachen können sehr leicht bei Versuchen mit den Elementen *Fe, Cu, Zn* usw. und bei Elementen von benachbartem Atomgewicht beobachtet werden; sie gelten ganz allgemein, obwohl man in manchen Fällen bei den Versuchen besondere Vorsichtsmaßregeln anwenden muß.

2. Die Durchdringungsfähigkeit der charakteristischen Strahlung wächst mit dem Atomgewicht des strahlenden Elements. Je höher das Atomgewicht, desto kürzer ist die Wellenlänge der für das betreffende Element charakteristischen X-Strahlung.

3. Die charakteristische Strahlung wird in einer Substanz nur dann erregt, wenn sie einer X-Strahlung von stärker durchdringender Art — oder einer Strahlung von kürzerer Wellenlänge — ausgesetzt wird. Diese Regel ist einfach eine Erweiterung des Stokesschen Fluoreszenzgesetzes. Die Kenntnis dieser Regel setzt uns in den Stand, die Strahlung von einer ausgedehnten Reihe von Elementen zu untersuchen.

4. Alle beobachteten charakteristischen Strahlungen zerfallen in zwei Reihen (*K*- und *L*-Reihe). Die Strahlung jeder dieser beiden Reihen wird durchdringender (von kürzerer Wellenlänge), je höher das Atomgewicht des Elements ist. Eine Ausnahme von dieser Regel konnte in keiner Reihe nachgewiesen werden. Es ist höchst wahrscheinlich, daß jedes Element seine charakteristischen Strahlungen hat, obgleich die experimentellen Methoden noch nicht vollkommen genug sind, das für alle Elemente nachzuweisen. Es ist ebenso höchst wahrscheinlich, daß es auch noch nicht beobachtete Strahlungen anderer Serien gibt.

5. Die charakteristische Strahlung wird gleichmäßig nach allen Richtungen rund herum um die strahlende Substanz ausgesandt und ist unabhängig von der Fortpflanzungs- und Polarisationsrichtung der erregenden primären Strahlung. Es ist daher eine unabhängige oder nachfolgende Bewegung der Elektronen, welche die charakteristische Strahlung hervorruft.

6. Die Intensität der von einer primären Strahlung von gegebener Intensität hervorgerufenen charakteristischen Strahlung variiert mit der Absorbierbarkeit der primären Strahlung nach einem bestimmten Gesetz.

7. Die Emission der charakteristischen Strahlung wird von einer besonderen Absorption der erregenden primären Strahlung begleitet. Die Änderung der Absorption der primären Strahlung mit der Wellenlänge scheint einfach von einer Beziehung zwischen der Wellenlänge und denjenigen der charakteristischen Strahlungen der absorbierenden Substanz abzuhängen.

8. Die Emission der charakteristischen Strahlung wird von einer besonderen Emission von Elektronen begleitet — der korpuskularen sekundären Strahlung der strahlenden Substanz.

9. Die partielle Transformation einer primären Strahlung in eine charakteristische Strahlung wird vom Verlust der gesamten ionisierenden Kraft der primären und aller sekundären Strahlungen begleitet — das bedeutet die Transformation der Energie in eine noch nicht beobachtete Form. Die durch eine X-Strahlung hervorgerufene Ionisation ist also kein richtiges Maß für die Absorption dieser Strahlung.

10. Eine charakteristische Strahlung verursacht während des Durchgangs durch Materie die Ausstoßung von Elektronen aus einigen der getroffenen Atome; die Geschwindigkeit des Ausstoßens ist dabei nur von der Durchdringungsfähigkeit dieser Strahlung abhängig; je durchdringender die Strahlung ist, um so größer ist die Ausstoßungsgeschwindigkeit. Eine ähnliche Beziehung gilt, wie sich zeigen läßt, für das Licht. Benutzt man die Plancksche Formel $\frac{1}{2} mv^2 = hn$ zur Berechnung der Frequenz n und der Wellenlänge und die Werte von Whiddington für die Ausstoßungsgeschwindigkeit, so findet man die Wellenlängen λ der charakteristischen Strahlungen (*K*-Reihe) für verschiedene Elemente, wie folgt:

Al-Strahlung	(*K*-Reihe)	. . . $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-8}$	cm
Ca- „	„	. . . 2,73	„
Cr- „	„	. . . 1,6	„
Cu- „	„	. . . 1,08	„
Rh- „	„	. . . 0,41	„
Ag- „	„	. . . 0,375	„
Ce- „	„	. . . 0,22	„

11. Alle Versuche deuten darauf hin, daß die Erscheinung eine solche der Fluoreszenz ist — vielleicht in ihrer einfachsten Form —, wobei die charakteristische X-Strahlung aller Wahrscheinlichkeit nach ebenso homogen ist wie das Licht einer gewöhnlichen Spektrallinie. Im Gegensatz zu der leuchtenden Fluoreszenz entsteht die Emission an einem Teile des Atoms, der durch keine physikalischen Mittel, soweit sie zu unserer Verfügung stehen, angreifbar ist.

12. Die charakteristische X-Strahlung wird auch durch korpuskulare Strahlen (β-Strahlen) erregt, wenn diese eine Geschwindigkeit haben, die größer ist als eine bestimmte kritische Ge-

schwindigkeit. Diese kritische Geschwindigkeit ist gleich der Emissionsgeschwindigkeit der Korpuskeln, die von Körpern ausgehen, welche der X-Strahlung ausgesetzt sind. — Es ist wahrscheinlich, daß dies in fundamentaler Weise mit dem Stokesschen Gesetz verknüpft ist. Denn ob die charakteristische Strahlung durch korpuskulare Strahlung oder durch X-Strahlung hervorgerufen ist, so scheint es doch wesentlich zu sein, daß jede Art der primären Strahlung fähig ist, die Ausstoßung von Elektronen mit einer Geschwindigkeit zu verursachen, die größer ist als die kritische, für jede besondere X-Strahlung charakteristische Geschwindigkeit.

13. Dieser Bericht würde sehr unvollständig sein, wollte man nicht noch der neueren Untersuchungen über die Interferenz und Reflexion Erwähnung tun, die von v. Laue, Friedrich und Knipping begonnen wurden. Der Verfasser unternahm in Gemeinschaft mit Herrn Martyn Versuche über die Änderung der Intensität der unter verschiedenen Winkeln an Spaltflächen von Steinsalz reflektierten Strahlen. Aus den Spektren verschiedener Ordnungen wurde unter Benutzung der Gleichung $2d\cos\theta = n\lambda$ (d Entfernung zwischen aufeinanderfolgenden Molekülschichten, θ der Einfallswinkel, der die Spektrallinie der n^{ten} Ordnung ergibt) ein Wert von λ in vollkommener Übereinstimmung mit dem aus den Planckschen Gleichungen abgeleiteten gefunden. Infolge von Komplikationen, welche durch eine Periodizität in der Struktur der benutzten Kristalle hervorgerufen werden, kann allerdings diese Betrachtung noch nicht als völlig sicher gestellt gelten. W. H. und W. L. Bragg, ferner Mosely und Darwin haben dieselbe Sache nach einer Methode, die diese Mängel nicht aufweist, studiert und haben die Wellenlängen einiger charakteristischen Strahlungen gefunden, welche direkt von der Antikathode einer X-Strahlen-Röhre ausgingen. So fanden die Herren Bragg für die charakteristische Rhodiumstrahlung (K-Reihe) $\lambda = 0{,}6 \cdot 10^{-8}$. Sie fanden ferner, daß die Wellenlänge der emittierten charakteristischen Strahlung um so kürzer wird, je höher das Atomgewicht des Strahlers ist.

14. Der größte Teil der von einer gewöhnlichen X-Strahlen-Röhre ausgesandten primären Strahlung scheint durch die Kathodenteilchen hervorgebracht zu sein, wenn diese in bestimmter Weise mit den Atomen in der Antikathode zusammentreffen. (Diese Ansicht wird durch Versuche über die Polarisation der primären Strahlung gestützt.) Diese Strahlung kann als eine Strahlung mit einem kontinuierlichen Spektrum angesehen werden; aber infolge der Absorption der längeren Wellen durch das Glas der Röhre weist sie nur einen engen Wellenlängenbereich auf, wenn man sie auf die gewöhnliche Weise außerhalb der Röhre untersucht. Dazu kommen noch die charakteristischen Strahlungen, welche in der Antikathode sowohl durch die Kathodenstrahlen als auch durch die primäre Röntgenstrahlung erregt werden. In beiden Fällen kann die Emission der charakteristischen Strahlung nur dann auftreten, wenn ein Elektron mit einer Geschwindigkeit größer als eine kritische Geschwindigkeit ausgestoßen worden ist. Jede charakteristische Strahlung ist einer Schwingung zuzuschreiben, die in einem Atom infolge der Ausstoßung eines besonderen Elektrons erregt wird. Aber die Energie, welche zuerst von dem Elektron aufgenommen werden muß, muß den kritischen, für dies Elektron charakteristischen Wert überschreiten. Dieser kritische Wert variiert mit dem Elektron, aber die Ausstoßung korrespondierender Elektronen in verschiedenen Atomen verursacht die Emission eines langen Wellenzuges mit den Spektrallinien der K- oder L-Reihen. — Die vollkommene Ähnlichkeit der Absorptionsgesetze für alle Elemente und alle Durchdringungsvermögen läßt auf eine weitgehende Genauigkeit und Gesetzmäßigkeit in der die Strahlung hervorbringenden Bewegungen schließen.

15. Zwei der am meisten interessierenden Gesichtspunkte, die man beim Studium der charakteristischen X-Strahlungen beobachten kann, sind: 1. die wundervolle Einfachheit aller Erscheinungen in dem Sinne, daß das Verhalten einer Substanz für alle anderen typisch ist; 2. die fundamentale Identität von Röntgenstrahlung und Licht. Wir haben kürzlich den Beginn einer Spektroskopie der Röntgenstrahlung gesehen.

(Eingegangen 5. Januar 1914.)

ZUSAMMENFASSENDER BERICHT.

Fünfte Konferenz der Internationalen Vereinigung für Sonnenforschung (International Union for Cooperation in Solar Research) in Bonn, 30. Juli bis 5. August 1913.

In der Woche vom 30. Juli bis zum 5. August 1913 fand in Bonn die fünfte Konferenz der International Union for Cooperation in Solar Research statt (vierte 1910 in Pasadena, Kalifornien, dritte 1907 in Paris). Es hatten sich genau 100 aktive Teilnehmer neben einer Reihe inaktiver eingefunden, zum größeren Teil Abgeordnete der Akademien und Körperschaften, aus denen sich die Solar Union zusammensetzt, zum kleineren Teil geladene Gäste oder Mitglieder von Ausschüssen. Entsprechend dem internationalen Charakter der Vereinigung waren die Ausländer stark vertreten; über 20 Amerikaner, 14 Vertreter Frankreichs, 16 Engländer und zahlreiche Vertreter Deutschlands, Kanadas, Belgiens, Rußlands, Österreich-Ungarns, Italiens, Spaniens, Hollands, Schwedens und Norwegens waren erschienen. Von dem geschäftsführenden Vorstande fehlten Hale-Pasadena und Schuster-London (Manchester) infolge von Krankheit. Der Vorsitz während der Bonner Tagung fiel statutenmäßig Deutschland zu, und zwar den Herren Kayser-Bonn, Küstner-Bonn, Schwarzschild-Potsdam, Runge-Göttingen, Pringsheim-Breslau. Turner-Oxford vertrat den abwesenden Vorstand. Der Umstand, daß die Mitglieder und Teilnehmer der Solar Union sich fast alle von früheren Tagungen in Pasadena, Paris und Oxford her kennen und in Ausschüssen und Komitees zusammengearbeitet haben, bewirkte, daß die Konferenz der Solar Union einen persönlicheren und intimeren Charakter trug, als er Zusammenkünften in größerem Rahmen eigen ist. Die von den Bonner Teilnehmern, in erster Linie Herrn H. Kayser sowie den Städten Bonn und Köln getroffenen Vorbereitungen und die wohlgelungenen Veranstaltungen und Festlichkeiten verstärkten diesen Charakter und stellten die Bonner Zusammenkunft in die erste Reihe mit den bestgelungenen Veranstaltungen im Auslande. Als nächster Ort der Tagung für 1916 wurde auf Einladung der italienischen Regierung und der Soc. degli Spettroscopisti Italiani Rom gewählt.

Bei den Tagungen der Solar Union treten bekanntlich die Vorträge gänzlich zurück, sie bilden die Ausnahme. Die Verhandlungen finden in der Regel im Anschluß an Berichte und Anträge statt, die in speziellen Kommissionen vorbereitet sind. Diese haben in dem Zwischenraum zwischen zwei Konferenzen gearbeitet oder tagen neben den Hauptsitzungen der Solar Union. Über Anträge und Berichte wird nach Gesellschaften abgestimmt. Im Anschluß an die Verhandlungen werden ferner einzelne Vorträge gehalten, in der Regel auf besondere Einladung des Vorstandes. Als erfolgreiche Neuheit der Bonner Tagung sei eine Conversazione genannt, die am Abend des 4. August in den Räumen des neuen physikalischen Instituts, in dem auch sonst die Sitzungen stattfanden, abgehalten wurde. Jeder Teilnehmer der Solar Union hatte hier Gelegenheit, vor einem Kreise spezieller Interessenten Vorführungen zu machen und Erläuterungen zu neuen Arbeiten und Untersuchungen zu geben. Von den Thematen der Conversazione seien die folgenden genannt: A. Belopolsky: Die Spektra von canum venaticorum; C. G. Abbot: Über neuere Untersuchungen über die Solarkonstante; G. Hemsalech: Über Resonanzfunken, Funken- und Flammenspektra; H. Chrétien: Über den neuen Spektroheliographen in Nizza; F. Stratton; Über die Spektra der nova geminorum Nr. 2; E. C. Pickering, S. Bailey, Miss Cannon: Über neuere Arbeiten aus Harvard Coll. Observ. (Sternspektra, Veränderliche usw.); A. Riccò: Sonnendurchmesser und Sonnengranulationen; M. Wolf: Die Spektra von Nebelflecken; W. Duffield: Spektrum des Eisens bei Drucken von 140, 160 und 200 Atmosphären; H. Kayser: Neue Instrumente und Versuchsanordnungen aus dem Physikalischen Institut in Bonn; H. N. Russel: Beziehungen zwischen den Spektren und anderen Eigenschaften der Sterne; Ch. St. John: Spektra des Evershedeffektes (radiale Bewegung in Sonnenflecken); E. Hertzsprung: Spektra von nova geminorum, Sonnenspektrum mit Echelon, Objektivprismenaufnahmen zur Bestimmung von Radialgeschwindigkeiten; W. H. Julius: Sonnenstrahlung bei der ringförmigen Finsternis 1912; C. Störmer: Nordlichtaufnahmen von zwei Stationen in 27 km Abstand im nördlichen Norwegen März 1913; F. Slocum; Aufnahmen von Sonnenprotuberanzen; F. Goos: Aufnahmen mit neuem Konkavgitter von Anderson; J. Stebbins: Selenphotometrie; A. Pflüger: Spektrometer mit Steinsalz-Quarz-Achromaten; E. Hertzsprung: Farben schwacher Sterne; W. Michelson: Das bimetallische Lamellenaktinometer.

Dem Kongreß wurden eine Anzahl Abhandlungen zur Publikation und Kenntnisnahme überreicht, von denen die folgenden genannt sein mögen:

W. H. Julius (Vortrag): Über die Brechung

des Lichts beim Durchlaufen wirbelnder Gasmassen und über Sonnenflecken (abgedruckt in dieser Zeitschr. **15**, 48–54, 1914); C. Störmer: Über Wirbel auf der Sonne. (Der Verfasser hat u. a. das Magnetfeld eines Wirbels berechnet, dessen elektrische Stromlinien logarithmische Spiralen bilden. Ein Vergleich mit den Beobachtungen an Sonnenflecken ergibt, daß die Wirbel, die Sonnenflecken entsprechen, in tieferen Regionen der Sonnenatmosphäre liegen müssen, und daß eine Konvektion negativer Elektrizität als wahrscheinliche Ursache des Magnetfeldes anzunehmen ist.) S. Albrecht: Über Wellenlängenmessungen von Spektrallinien (in Sternspektren), Radialgeschwindigkeiten von Sternen und die Klassifizierung von Sternspektren; Ch. St. John: Über radiale Bewegung in Sonnenflecken (Messungen des Dopplereffektes und Diskussion der Beobachtungen an Sonnenflecken führen zum Schlusse, daß die Wirbel, die den Sonnenflecken zugrunde liegen, tief unter der Oberfläche der Sonne sich befinden); G. E. Hale: Vorläufige Beobachtungen über den Zeemaneffekt, der vom allgemeinen Magnetfelde der Sonne herrührt. (Das allgemeine Magnetfeld der Sonne gleicht demjenigen einer magnetisierten Kugel; der magnetische Nordpol liegt in der Nähe des Nordpols der Sonne, entspricht in seiner Lage der Richtung des Magnetfeldes der Erde. In Schichten oberhalb des *Fe*- und *Ti*-Niveaus besteht kein allgemeines Feld von merklicher Stärke. Das Feld an den Polen wird auf etwa 50 Gauß geschätzt. An den Polen und am Äquator verschwindet der Zeemaneffekt, der vom allgemeinen Felde herrührt, er erreicht in einer Breite von 45° ein Maximum. Nimmt man an, daß eine mit der Sonne rotierende Ladung die Ursache des Feldes sei, so muß die Ladung negativ sein.) W. H. Julius: Über den Lichtabfall am Rande der Sonnenscheibe (der Lichtabfall kann fast vollständig aus der molekularen Zerstreuung quantitativ erklärt werden).

Aus den Komiteeberichten und -beschlüssen sei das folgende erwähnt: Aus dem Bericht des Komitees für Messung der Sonnenstrahlung: Infolge der Eruption des Mt. Katneai in Alaska im Juli 1912 waren Messungen der Solarkonstanten im letzten Jahre kaum möglich. Die Sonnenstrahlung im nördlichen Amerika hatte zeitweise um 20 Proz. abgenommen. Als Resultat der Messungen Abbots und seiner Mitarbeiter in den letzten 10 Jahren ergibt sich der neue Wert 1,932 Cal/cm² Min. Die Intensität der Sonnenstrahlung variiert mit der Sonnenfleckenperiode, und zwar um 5—10 Proz. Daneben bestehen kleinere Unregelmäßigkeiten, deren Natur noch nicht aufgeklärt ist. Im Zusammenhange mit diesem Berichte macht Schwarzschild darauf aufmerksam, daß der Verlauf der Schwärzung der Fraunhoferschen Linien beim Übergange von der Mitte zum Rande der Sonne auf die Anwesenheit einer bloß zerstreuenden, nicht absorbierenden Gashülle hindeutet (vgl. auch oben Julius). J. Baillaud hat auf photographischem Wege nachgewiesen, daß der Helligkeitsabfall von der Mitte zum Rande der Sonne von Tag zu Tag wechselt, und zwar in verschiedenem Maße für die verschiedenen Farben. J. Evershed beschreibt eine neue Methode zur Abschätzung von Änderungen in der allgemeinen Strahlung der Sonne. Die Methode beruht auf einem photographisch-photometrischen Vergleiche zwischen dem Licht des Mondes und demjenigen eines passend gewählten Vergleichsterns. Einzelheiten müssen übergangen werden.

Der Bericht des Komitees für Wellenlängennormalen beschäftigt sich insbesondere mit der Vervollständigung der sekundären und tertiären Normalen und den Schwierigkeiten, die bei der Festlegung der letzteren aufgetreten sind und zum Teil ihre Ursache in wahren oder scheinbaren Wellenlängenänderungen haben, die eintreten, wenn man den als Normallichtquelle gewählten Eisenbogen unter verschiedenen Bedingungen benutzt und Licht aus verschiedenen Partien des Bogens verwendet. H. Kayser, Ch. Fabry und H. Buisson sowie Ch. St. John überreichten dem Kongresse Sonderberichte, die durch Mitteilungen von F. Goos, K. Schwarzschild, J. Hartmann, F. Paschen, Janicki, H. Konen u. a. ergänzt wurden. Die schließlich angenommenen Zahlen und Leitsätze seien hier wiedergegeben, soweit sie von allgemeinem physikalischen Interesse sind:

Die Kommission für Wellenlängennormalen empfiehlt die in der folgenden Tabelle aufgeführten Wellenlängen zur Annahme als weitere internationale Normalen zweiter Ordnung. Sie sind von mehreren Beobachtern mit dem Fabry-Perotschen Interferometer gemessen; aus diesen Ergebnissen ist das Mittel genommen.

Die Kommission empfiehlt die weiter folgenden Vorschriften für den Gebrauch des Eisenlichtbogens in Luft zur Bestimmung von Normalen dritter Ordnung:

1. Die Länge des Lichtbogens sei 6 mm.
2. Für Wellenlängen, die größer als 4000 sind, sei der Strom 6 Amp., und für solche unter 4000 4 Amp. oder womöglich weniger.
3. Man benutze Gleichstrom mit dem positiven Pol über dem negativen und mit einer Spannung von 220 Volt. Der Durchmesser der Eisenstäbe sei 7 mm.
4. Als Lichtquelle werde ein axialer Teil von etwa 2 mm Länge aus der Mitte des Lichtbogens verwendet.

5. Von Eisenlinien sind nur die Gruppen *a, b, c, d* (nach der Mt. Wilsonschen Einteilung der Eisenlinien) zu verwenden. Es wird darauf hingewiesen, daß die Definition der Linien der Gruppe *c* (Klasse 5) und *d* besser wird, wenn man den Spalt senkrecht zum Lichtbogen in seiner Mitte stellt oder wenn man die Richtung des Stromes während der Aufnahme mehrmals wechselt.

Auf der Versammlung von 1910 auf Mt. Wilson wurden in dem Kommissionsbericht „Laboratorien oder Sternwarten, die erstklassige Konkavgitter besitzen", aufgefordert, Normalen dritter Ordnung des Eisenspektrums zu bestimmen.

Es war hiermit nicht beabsichtigt, die Arbeit auf solche Beobachter zu beschränken, die im Besitz von Konkavgittern sind. Es ist im Gegenteil die Mitwirkung aller derjenigen erwünscht, die über ebene Gitter oder Prismen von hinreichender Dispersion und auflösender Kraft verfügen. Zu diesem Ende empfiehlt die Kommission, daß weitere Standardlinien zweiter Ordnung bestimmt werden mögen, die die Lücken unsrer bisherigen Tabellen ausfüllen, damit die Interpolationsmethode mit größerer Genauigkeit verwendet werden kann.

Weitere Normalwellenlängen zweiter Ordnung aus dem Bogenspektrum des Eisens.

λ (Intern)	Fabry und Buisson	Pfund	Burns	Eversheim
5709,396	396	396	395	—
—	—	—	—	—
4233,615	615	615	—	616
4191,444	441	445	—	444
4147,676	677	677	—	674
4134,685	685	—	—	685
4118,552	552	551	—	552
4076,642	641	644	—	642
4021,872	872	871	—	872
3977,746	745	745	—	747
3935,818	818	—	—	818
3907,937	938	—	—	936
3906,482	481	483	—	—
3865,527	526	—	—	528
3850,820	820	—	—	820
3843,261	261	261	—	—
3805,346	346	346	—	347
3753,615	615	616	—	614
3724,380	379	380	—	380
3677,629	628	630	—	630
3676,313	312	—	—	314
3640,392	391	392	—	392
3606,682	681	—	—	683
3556,881	879	883	—	882
3513,821	820	821	—	822
3485,345	344	346	—	346
3445,154	155	154	—	154
3399,337	337	338	—	357
3370,789	789	788	—	791
—	—	—	—	—
6750,163	—	—	164	162
6678,004	—	004	000	008
6592,928	—	928	925	931
6546,250	—	251	247	252

Nickellinien, Bogen zwischen Nickelstäben:

I. A.	Fabry und Buisson	Eversheim	Pfund
759	5857,760	759	757
882	5892,882	881	882

(Diese Wellenlängen beziehen sich auf normalen Luftdruck und 15° C.)

Im Anschluß an diesen Bericht teilte F. Paschen einige im Ultrarot mittels Interferometer genau gemessene Helium- und Kadmiumlinien mit.

Der Bericht des Ausschusses für die Klassifizierung der Sternspektra sei hier nur erwähnt.

Der Ausschuß für Untersuchungen mit dem Spektroheliographen wurde erweitert zu einem aus zwei Unterausschüssen bestehenden Komitee für die Sonnenatmosphäre.

In Reggio und Neu-Seeland werden neue Observatorien für spektroheliographische Untersuchungen errichtet. Im Zusammenhange hiermit wurden von Hale, Chrétien, Riccò, Butler, Deslandres u. a. Berichte über neuere Untersuchungen über Flocculi, Flecken usw. erstattet.

Das Komitee für die Messung der Sonnenrotation vermittels Linienverschiebungen berichtet über systematische Differenzen zwischen den Resultaten verschiedener Beobachter und stellt ein Programm für die Messungen der nächsten Zeit auf.

Die Einzelheiten eines ausführlichen Berichts des Komitees für okulare Untersuchung des Sonnenfleckenspektrums lassen sich hier nicht wiedergeben. F. Cortie, J. Evershed, J. Fowler, Naegamvala fügten zum Teil ausführliche Berichte, auch über photographische Untersuchungen hinzu, aus denen hervorgeht, daß von einem Fleckenspektrum als bestimmtem und charakteristischem Spektrum gesprochen werden kann. Eine ausführliche Anleitung zu visuellen Beobachtungen und eine Liste ausgewählter Sonnenfleckenlinien ergänzen den Bericht.

Das neue Subkomitee für visuelle Beobachtungen von Protuberanzen und verwandte Erscheinungen hat neue Regeln für die Beobachter aufgestellt.

Im Anschluß an diesen Bericht trug G. Hemsalech vor über verstärkte Linien (enhanced lines). Er gelangt auf Grund von Vergleichen zwischen Flammen- und Funkenspektren dazu,

vier verschiedene Typen von verstärkten Linien zu unterscheiden: 1. Linien, die schon in Flammen höherer Temperatur verstärkt werden, z. B. H und K von Ca; 2. Linien, die im Kegel des Bunsenbrenners auftreten, in heißen Flammen aber fehlen, im Bogen als Pollinien sichtbar sind: Beispiel Fe 3871; 3. Linien, die von Flammen nicht emittiert werden, im Bogen schwach sind und im Funken bedeutend verstärkt werden: Beispiel Fe 4924; 4. die eigentlichen Funkenlinien: Beispiel Mg 4481.

Zugunsten der Errichtung eines Sonnenobservatoriums in Australien wurde ein Beschluß gefaßt.

Nach Schluß der Konferenz begaben sich eine Anzahl Teilnehmer noch zur Versammlung der Astronomischen Gesellschaft nach Hamburg. Ausführliche Berichte über die Verhandlungen erscheinen in Band IV der Transactions Solar Union. Konen.

(Eingegangen 11. Dezember 1913.)

BESPRECHUNGEN.

P. Langevin u. M. de Broglie, La théorie du rayonnement et les quanta. Rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911. Sous des auspices de M. E. Solvay. gr. 8. VI u. 461 S. mit 21 Figuren. Paris, Librairie Gauthier-Villars. 1912[1]). Fr. 15.—

Der Bericht über den ersten „Solvay-Kongreß", dessen französische Ausgabe hier vorliegt — eine deutsche ist bereits im Druck — ist mehr als eine trockene Darstellung des Standes der Strahlungs- und Quantentheorie; der Gedanke des hochherzigen Mäcens der Physik, des Herrn M. E. Solvay, durch Berufung eines „Conseil" den hervorragenden Forschern Gelegenheit zu geben, in unmittelbaren Ideenaustausch zu treten, ist auch in dem gedruckten Berichte lebendig geblieben. Denn durch die ausführliche Aufnahme der Diskussionen, die sich an die Vorträge anschlossen, gewinnt man einen Einblick in die Denk- und Arbeitsweise der Männer, aus deren Geiste die neuen, umstürzenden Anschauungen der theoretischen Physik geboren wurden. Beim Lesen dieser Vorträge und Diskussionen treten die Persönlichkeiten der Redner nicht in der Weise hinter der Sache zurück, wie das sonst in der wissenschaftlichen Literatur üblich ist. Für jeden, der sich aktiv an der Entwicklung der Wissenschaft beteiligt, liegt darin ein großer Reiz; denn so lange die Grundlagen der Quantentheorie noch so wenig geklärt sind, wie heute, hängt die Stellungnahme für oder wider die neue Lehre in nicht geringem Maße von persönlichen Neigungen und Anschauungen ab.

Wenn wir uns nun zu einer kurzen Inhaltsangabe des Solvay-Berichts wenden, so sehen wir unter den Teilnehmern naturgemäß die Partei der Quantenfreunde in überwiegender Zahl vertreten. Gleich auf die Begrüßungsansprachen der Herren Solvay, Prof. Lorentz und Nernst folgt der erste Vortrag des Vorsitzenden des Kongresses, H. A. Lorentz aus Leiden, „über die Anwendung des Satzes von der Gleichverteilung der Energie auf die Strahlung". Dieser steht gewissermaßen über den Parteien. Lorentz führt in möglichster Allgemeinheit den Nachweis, daß die klassische Mechanik und Elektrodynamik (deren Grundgesetze sich auf die Form der „Hamiltonschen Gleichungen" bringen lassen) in Verbindung mit den gewöhnlichen Ansätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung unausbleiblich zu der Gleichverteilung und damit zum Rayleigh-Jeansschen Strahlungsgesetze führen; sodann diskutiert er die Folgerungen, die sich aus jeder, dem Wienschen Verschiebungsgesetze genügenden Strahlungsformel für die mittlere Energie eines freien Elektrons im Strahlungsfelde ergeben, und kommt zu dem Schlusse, daß die einfachen Interferenzschwankungen nicht hinreichen, um dem Elektron die nötige Energie $\frac{3}{2} kT$ mitzuteilen, sondern Schwankungen anderer Art, etwa nach Plancks Quantenhypothese, erforderlich sind. Nun kommen zuerst die Gegner der Quantentheorie zu Wort; Lord Rayleigh, der selbst nicht anwesend ist, äußert sich in einem Briefe an Nernst, während J. H. Jeans seine Ansicht in einem ausführlichen Vortrage „über die kinetische Theorie der spezifischen Wärme" vertritt. Beide sehen den einzigen Ausweg aus dem Widerspruche zwischen der klassischen Theorie und dem Experimente in der Annahme, daß der von der Theorie geforderte Gleichgewichtszustand erst nach ungeheuer langer Zeit eintrete und die Experimente nicht mit dem wahren Gleichgewicht, sondern einem Übergangszustand zu tun hätten. In der folgenden Diskussion kommt deutlich zum Ausdruck, daß die Mehrzahl der Kongreßteilnehmer diesen Vorschlag für unbefriedigend hält angesichts des experimentellen Materials über die schwarze Strahlung, die durchaus den Charakter wahren Gleichgewichts zu haben scheint. Dieses Material wird in den beiden folgenden Vorträgen von E. Warburg und H. Rubens zusammengestellt. Von den Anhängern der Quantentheorie kommt zuerst ihr Begründer M. Planck zu Wort, der nach einer Darstellung der Theorie die Ansicht äußert, daß das Auftreten der Quanten vielleicht auf diejenigen (chemischen) Kräfte beschränkt sei, die Atome und Elektronen im Moleküle zusammenhalten, während sonst für die Bewegung der Moleküle als ganze und der freien Elektronen die Gesetze der klassischen Dynamik gelten. Die beiden folgenden Vorträge von M. Knudsen über „die kinetische Theorie und die experimentellen Eigenschaften der vollkommenen Gase" und von J. Perrin, „die Beweise der Realität der Moleküle" haben weniger mit den Quanten, als mit dem Ausbau unserer atomistischen Vorstellungen zu tun, die durch die neuen Entdeckungen unverhoffte Bestätigung erhalten haben. Im nächsten Berichte wendet sich W. Nernst wieder dem Hauptthema zu, indem er über die „Anwendung der Quantentheorie auf verschiedene physiko-chemische Pro-

1) Die Besprechung erscheint leider — nicht durch die Schuld des jetzigen Referenten — verspätet. D. Red.

bleme" spricht. Im Mittelpunkte steht dabei natürlich die Formel von Einstein für die spezifische Wärme fester Körper und ihre erfolgreiche Weiterbildung durch Nernst und Lindemann; interessant ist, daß Einstein in der Diskussion diese Verbesserungen als provisorisch bezeichnet und den Mangel der Theorie (Annahme monochromatischer Schwingungen der Moleküle) bezeichnet, der seitdem in der neueren Theorie tatsächlich beseitigt worden ist. (In der deutschen Ausgabe wird die Weiterbildung der Theorie von Herrn Eucken in einem Anhange dargestellt.) Von ähnlicher Bedeutung für die Quantentheorie wie die spezifische Wärme fester Körper ist das Verhalten der elektrischen Leitfähigkeit bei tiefen Temperaturen, über die Kamerlingh Onnes berichtet. Während bei all diesen Ansätzen die Quantentheorie nur bei der Berechnung der Mittelwerte der Energiegrößen herangezogen wird, wendet A. Sommerfeld das „Wirkungsquantum" auf einzelne, sogar auf nicht periodische Molekularvorgänge an, auf die Röntgen- und γ-Strahlung, auf den lichtelektrischen Effekt und die Ionisationsspannung. P. Langevins Bericht über die „kinetische Theorie des Magnetismus und die Magnetonen" gipfelt in der Beziehung, die auf Grund der Sommerfeldschen Hypothese zwischen dem Wirkungsquantum und dem Magneton besteht. Am Schlusse ergreift A. Einstein das Wort, um den Stand des Problems der spezifischen Wärmen darzulegen, wobei er sowohl die festen Körper, als auch die Gase berücksichtigt; den Hauptteil seiner Darlegungen bilden dabei tiefgründige Untersuchungen über die Quantenhypothese und die Widersprüche, die sich zwischen ihr und der alten Theorie auftun. M. Born.

J. D. van der Waals, Lehrbuch der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf das Gleichgewicht von Systemen mit gasförmig-flüssigen Phasen. Nach den Vorlesungen bearbeitet von Ph. Kohnstamm. 2. Teil. gr. 8. XVI u. 646 S. mit 205 Figuren im Text. Leipzig, Johann Ambrosius Barth. 1912. Gebunden M. 24.—

Dem ersten im 11. Bande dieser Zeitschr. 551, 1910, besprochenen Bande der Vorlesungen von van der Waals ist nach längerem Zwischenraum nunmehr der zweite gefolgt, der von allen, die sich für Fragen der Thermodynamik interessieren, sehnlichst erwartet wurde. Enthält der Band doch einen großen Teil des Lebenswerkes des berühmten niederländischen Forschers, die Theorie der binären Gemische, die bisher nur in zahlreichen verstreuten Abhandlungen mitgeteilt worden war. Eine solche zusammenfassende Darstellung ist hier doppelt wertvoll, weil wir die Grundanschauungen kennen lernen, die eine große Anzahl niederländischer Forscher bei ihren theoretischen und experimentellen Arbeiten geleitet haben.

Der Band beginnt mit der Besprechung der Phasenregel. Schon hier tritt bei der Erörterung der Grundbegriffe dieses Satzes und der von verschiedenen Seiten über diese geäußerten Ansichten das bezeichnende Merkmal des ganzen Werkes hervor, die außerordentliche Gründlichkeit und Sorgfalt, mit der sich der Verfasser in den Gegenstand vertieft hat.

Das zweite Kapitel behandelt die chemischen Potentiale und ihre Beziehungen zu den thermodynamischen Funktionen sowie das Paradoxon von Gibbs.

Im dritten Kapitel finden wir die Sätze über verdünnte Lösungen, die im Anschluß an einen auf W. Gibbs zurückgehenden Gedankengang aus dem Kleinwerden der Menge des einen Bestandteils gegen die des anderen abgeleitet werden. Es mag zweifelhaft erscheinen, inwieweit es berechtigt ist, hierauf ohne Hinzuziehung weiterer Erfahrungstatsachen eine Theorie der verdünnten Lösungen aufzubauen, vor allem deshalb, weil man über das Gültigkeitsbereich dieser Sätze vollkommen im unklaren treibt. Man kann sich des Eindrucks nicht erwehren, als ob vom Verfasser Umfang und Bedeutung dieser Sätze wie auch des Begriffs des osmotischen Drucks nicht genügend gewürdigt würden. Merkwürdig bleibt es ja überhaupt, daß sich aus keinem Lande so viele Stimmen gegen die Theorie der verdünnten Lösungen erhoben haben, wie aus dem Vaterland ihres großen Begründers.

Im zweiten bis vierten Abschnitt sind die binären Systeme mit flüssigen und gasförmigen Phasen behandelt, also das Gebiet, dessen Entwicklung zum größten Teil den eigenen Arbeiten des Verfassers zu danken ist. Das Charakteristische seiner Theorie liegt darin, daß er eine allgemeine Zustandsgleichung der Zweistoffsysteme aufstellt und aus dieser alles ableitet. Diejenige Form dieser Gleichung, die van der Waals für die wahrscheinlichste hält, würde zu sehr komplizierten Formeln und vielfach kaum ausführbaren Rechnungen führen, da darin die Größe b durch eine quadratische Funktion der Zusammensetzung gegeben ist. Daher begnügt er sich mit der einfacheren Annahme einer linearen Abhängigkeit, von der anzunehmen ist, daß sie die Hauptursachen der unvollständigen Mischungen darzustellen erlaubt, wenn auch die Ergebnisse quantitativ nicht ganz richtig sind. Von diesem Gesichtspunkt aus werden die Fragen nach dem Dampfdruck binärer Mischungen in ihrer Abhängigkeit von der Zusammensetzung, die Erscheinungen im kritischen Gebiet, die Entmischung usw. in sehr eingehender Weise mit reichlicher Anwendung geometrischer Veranschaulichungen besprochen. Hat diese Art der Darstellung den Nachteil, daß sie sich von vornherein an eine bestimmte Form der Zustandsgleichung bindet, so steht demgegenüber als wesentlicher Vorteil im Vergleich mit der sonst üblichen Behandlungsweise, daß die heterogenen Gleichgewichte nicht eine eigene Gruppe von Urphänomenen bilden, sondern ihre Eigenschaften aus denjenigen der homogenen abgeleitet werden können.

In manchen Fällen läßt sich der Verfasser durch allzu festes Vertrauen auf die die Grundlage seiner Überlegungen bildende Zustandsgleichung zu Ungerechtigkeiten gegen andere Ansichten verleiten. so auf S. 179, wo die von Linebarger, Sakurai, Dolezalek und anderen aufgestellte Hypothese, daß die Partialdruckkurven und somit auch die Totaldruckkurve in normalen Fällen lineare Funktionen der Zusammensetzung sind, abgelehnt wird.

Im fünften Abschnitt werden die Gleichgewichte mit festen Phasen behandelt, wobei natürlich die Ausbeute nicht so groß ist, da eine Zustandsgleichung für feste Stoffe fehlt.

In der zweiten Abteilung werden die Einwirkungen äußerer Kräfte, elektrischer wie mechanischer und die chemischen Vorgänge besprochen. Hier ist die Behandlung viel weniger eingehend als in der ersten Abteilung.

Der ganze Band trägt, wie es seine Entstehung aus Vorlesungen erklärlich macht, einen ausgesprochen persönlichen Charakter; nach der Vorliebe des Verfassers für den einen oder anderen Gegenstand wird ihm mehr oder weniger Raum gewidmet. Manchen mag eine gewisse Einseitigkeit stören, jeder wird die liebevolle Vertiefung in den Gegenstand und die

scharfsinnige Kritik bewundern und keiner das Buch ohne reichste Förderung aus der Hand legen.

V. Rothmund.

H. W. B. Roozeboom, Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. III. Heft: Die tertiären Gleichgewichte, II. Teil: Systeme mit zwei und mehr Flüssigkeiten ohne Mischkristalle und ohne Dampf. Von F. A. H. Schreinemakers. gr. 8. XI u. 348 S. mit 148 Textabbildungen. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. 1913. M. 11.—

Die Bearbeitung des dritten Heftes des zweiten Teils von Roozebooms Werk hat wieder F. A. H. Schreinemakers übernommen. Es umfaßt die Systeme mit zwei und mehr Flüssigkeiten ohne Mischkristalle und ohne Dampf. Die möglichen Fälle der Entmischung tertiärer Systeme, die Bedingungen für das Nebeneinanderbestehen von drei flüssigen Phasen, die Binodalkurven und die Sättigungskurven bei Anwesenheit von einer oder mehreren festen Phasen werden mit einer Sachkenntnis und Gründlichkeit besprochen, wie sie nur einem Forscher zur Verfügung steht, der selbst auf dem fraglichen Gebiet Jahrelang tätig war und an seinem Ausbau mitgearbeitet hat. Das letzte Kapitel enthält Ableitungen mit Hilfe der ζ-Fläche, während in den vorausgehenden Kapiteln von der Verwendung derselben abgesehen und die Darstellung elementar gehalten ist. Graphische Darstellungen, meist im Gibbsschen Dreiecksdiagramm, dienen dabei zur Veranschaulichung.

In der Darstellung schließt sich das Buch an den früher besprochenen ersten Teil an (diese Zeitschr. 13, 254, 1912). Sie ist wieder möglichst allgemein gehalten, indem alle denkbaren Fälle vom Standpunkt der Phasenlehre geordnet und erörtert werden, und auf die Hervorhebung der spezifischen Eigentümlichkeiten verzichtet wird, die durch die Gesetze der verdünnten Lösungen oder durch die chemische Natur der Bestandteile gegeben sind.

Besonders dankenswert erscheint es, daß in einigen Fällen, die sich leicht vermehren ließen, auch auf praktische Anwendungen der anscheinend so ganz abstrakten phasentheoretischen Überlegungen hingewiesen wird, so auf S. 13, wo die Bestimmung des Gehalts wäßriger Lösungen an Alkohol oder Aceton durch Titration mit einer dritten Flüssigkeit bis zum Eintritt der Trübung angeführt wird. Solche Beispiele zeigen, wie wichtig eine Kenntnis dieses Erscheinungsgebiets auch für den Analytiker werden kann.

V. Rothmund.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Halle Dr. Erich Beschke (bisher in Gießen) für Chemie, an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr.-Ing. Fr. Martin für Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor der chemischen Technologie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Aladar Skita in gleicher Eigenschaft an der Universität Freiburg i. B., der a. o. Professor an der Universität Lemberg Dr. Siegmund Stephan Weyberg zum ord. Professor der Chemie an derselben Hochschule.

Berufen: Der ord. Professor an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Karl Hofmann zum ord. Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule München.

Verliehen: Dem ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule München Dr. August Föppl der Titel Geheimer Hofrat.

Akademiewahlen: Der Professor der Physik an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Johannes Stark wurde von der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen zum korrespondierenden Mitglied in ihrer mathematisch-physikalischen Abteilung gewählt.

Angebote.

Am **Geophysikalischen Institut der Universität Leipzig** wird vorraussichtlich zum 1. Juli eine neue

Assistentenstelle

zu besetzen sein. Hauptarbeitsgebiet: Dynamische Meteorologie. Promovierte Physiker, Geophysiker oder angewandte Mathematiker, an Universität oder technischer Hochschule ausgebildet, wollen ihre Bewerbung mit Lebenslauf an den Direktor **Prof. Bjerknes** richten.

Dipl.-Ingenieur oder Physiker,

möglichst mit Vorkenntnissen auf dem Gebiet der **Luftfahrt** für wissenschaftlich-literarische Arbeiten zum 1. April oder früher gesucht. Bewerbung mit Lebenslauf, Nachweis über bisherige Tätigkeit, Gehaltsansprüchen erbeten an die **Direktion der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Adlershof.**

AEG

sucht zu technisch-wissenschaftlicher Arbeit auf dem Gebiete des Apparatebaues und der Hochspannung für Laboratorium

jüngeren Physiker

mit abgeschlossenem Universitätsstudium (Staatsexamen bevorzugt), welcher Interesse an der Entwicklung von Untersuchungsmethoden und Apparaten hat.

Angebote mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen und Angabe des frühesten Eintrittstermins erbeten an

AEG-Fabriken Hennigsdorf bei Berlin.

Gesuche.

Junger Physiker, Dr. phil.,

Assistent am physikalischen Universitätsinstitut, **sucht** wissenschaftliche Stellung. Zuschriften unter **W. 22** an die Expedition dieser Zeitschr.

Für die Redaktion verantwortlich Dr. Hans Busch in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.